第 26卷第 4期
2006年 11月

大地测量与地球动力学
JOURNAL OF GEODESY AND GEODYNAMICS

Vol 26, No. 4
Nov. , 2006

文章编号: 1671-5942(2006)04-0005-05

参数约束平差法*

刘根友　郝晓光　柳林涛
(中国科学院测量与地球物理研究所,武汉　430077)

摘　要　将附有参数先验精度信息的平差问题扩展为参数约束平差,给出了参数约束平差法在数值计算上可以统一自由网平差的新概念,不再考虑自由网平差中较为繁琐的基准条件,并用算例加以说明。

关键词　参数约束平差　自由网平差　平差基准　数值计算　不适定问题
中图分类号: P207　　**文献标识码**: A

METHOD OF PARAMETER CONSTRAINT ADJUSTMENT

Liu Genyou, Hao Xiaoguang and Liu Lintao
(Institute of Geodesy and Geophysics, CAS, Wuhan　430077)

Abstract　The parameter adjustment with prior accuracy is extended to parameter constraint adjustment, the new conception that the parameter constraint adjustment can unify freedom network adjustments numerically is proposed. The trouble which are some datum condition equations dealing with freedom network is no longer considered. An example of trilateration network is given to illustrate the new idea.

Key words: parameter constraint adjustment, freedom network adjustment, adjustment datum, numerical calculation, ill-posed problem

1　引言

随着计算机技术的高速发展,过去先求解观测值平差值再计算待估量的条件平差方法已逐渐被淘汰,现代大地测量中的参数估计更多的是采用参数平差(间接平差)。参数平差的优点是将待估量直接作为未知数,有一个观测值就建立一个观测方程,易于建立规范的观测方程,通过解算法方程直接获得待估参数的估值。参数平差方法可以分为两大类:自由网平差和附合网平差。自由网平差又包括:经典自由网平差、普通秩亏自由网平差、拟稳平差和加权秩亏自由网平差[1,2]。与附合网平差不同的是,自由网平差的特点是观测网的形状不因平差问题的基准而变化。

解秩亏自由网平差问题时,一般需要知道平差问题的基准条件,根据基准条件获得惟一解[3~5]。但是有的平差问题的基准条件过于复杂,很难建立基准条件,如长距离高精度的 GPS基线处理存在大量的未知参数,其中包括站坐标、载波相位模糊度、卫星轨道参数、地球自转参数、天顶延迟参数等。对于一个具有 25个站点的 GPS网,未知数的个数可能多达 2 000多个,而且很多未知数之间具有较强的相关性,法方程的稳定性较差,如果按经典的最小

* 收稿日期: 2006-06-13
基金项目:中国科学院野外台站研究基金(051114);"基础地理信息与数字化技术"山东省重点开放实验室课题(SD040203);中国科学院"百人计划"项目
作者简介:刘根友,男,1967年生,博士,副研究员,现从事 GPS和形变研究. E-mail: liugy@asch.whigg.ac.cn

二乘法解算很难得到满意的结果。大多数平差问题中,在建立观测方程时,需要对观测方程进行线性化,必须知道这些未知数的近似值(初值),这些初始值一般也不是任意给出的(除水准网外),有其一定的精度范围,通常用方差表示。因此,可以说现代平差问题已经没有"完全未知"的未知数了,在平差过程中充分利用这些初始值的精度,有助于判别和抵御粗差,提高解的数值稳定性,具有参数先验精度信息的平差问题已有不少讨论和应用[3~7]。本文将其扩展为参数约束平差,并通过算例说明参数约束平差在数值计算上可以统一自由网平差。

2 附条件的平差问题

2.1 平差问题的基准条件

观测方程经过线性化后都可以表示为

$$\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times t}{A}\,\underset{t\times1}{X} - \underset{n\times1}{L},\ \underset{n\times n}{P} \tag{1}$$

式中 V 是观测值的改正数, P 是观测值的权阵, X 是未知参数, L 为观测值减去计算值,计算值由参数的近似值(初值)获得, A 为设计矩阵。

按最小二乘原理 $V^TPV = \min$ 获得法方程:

$$\underset{t\times t}{N}\,\underset{t\times1}{X} = \underset{t\times1}{U} \tag{2}$$

其中 $N = A^TPA$, $U = A^TPL$,当误差方程为列满秩时,法方程为满秩,有惟一解;否则 N 为秩亏阵,法方程有无穷多解,但改正数 V 永远满足最小二乘准则。

造成法方程秩亏的原因是因为在间接平差问题中没有足够的起算数据。自由网平差的特点是在建立观测方程时将所有待估参数(包括所有测站的坐标)都作为未知数。一旦观测值个数确定、观测网点数确定,法方程的维数也固定了。所有平差问题都可以表示为附有条件的间接平差形式:

$$\begin{cases} V = AX - L,\ P \\ CP_XX = 0 \end{cases} \tag{3}$$

式中, C 为条件矩阵, P_X 为正定矩阵,根据拉格朗日条件极值法,其法方程为

$$\begin{bmatrix} A^TPA & P_XC^T \\ CP_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^TPL \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

K 为待定系数,其维数等于条件方程的个数。以水准网为例说明具体平差问题的条件矩阵 C:

1)经典自由网平差 ($P_X = E$):固定一个(第 i 个)点的高程,此时有条件方程

$$\underset{1\times t}{C} = e_i \tag{5}$$

e_i 为 t 维单位向量,其中第 i 个元素为 1。

2)附合网平差 ($P_X = E$):如果以 m 个点强制附合(高程不变),条件矩阵 C 可以表示为

$$\underset{m\times t}{C} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{m-1} & e_m \end{bmatrix}^T \tag{6}$$

3)普通秩亏自由网平差(最小范数解, $X^TX = \min$,重心不变)

此时 C 为对应的基准条件 G_r,且满足 $G_rA^T = 0$:

$$G_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

4)拟稳平差(部分最小范数解, $X_2^TX_2 = \min$,部分重心不变)

$$G_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

5)加权秩亏自由网平差(加权最小范数解, $X^TP_XX = \min$)

$$G_rP_XX = 0 \tag{9}$$

2.2 一般解式及其转换

为了推导参数估值的协方差阵及实现不同平差结果的相互转换,需要得到未知数估值的直接表达式。如果条件方程中的系数阵 C 满足 $CA^T = 0$,此时 $C = G$,为秩亏自由网平差,求逆方法在一些文献中已有推导[2,8],此处推导一般公式。令

$$\begin{bmatrix} N & P_XC^T \\ CP_X & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{10}$$

有

$$\underset{t\times t}{N}\,\underset{t\times t}{D_{11}} + \underset{t\times t}{P_X}\,\underset{t\times n_c}{C^T}\,\underset{n_c\times t}{D_{21}} = \underset{t\times t}{E} \tag{11a}$$

$$\underset{t\times t}{N}\,\underset{t\times n_c}{D_{12}} + \underset{t\times t}{P_X}\,\underset{t\times n_c}{C^T}\,\underset{n_c\times n_c}{D_{22}} = \underset{t\times n_c}{O} \tag{11b}$$

$$\underset{n_c\times t}{C}\,\underset{t\times t}{P_X}\,\underset{t\times t}{D_{11}} = \underset{n_c\times t}{O} \tag{11c}$$

$$\underset{n_c\times t}{C}\,\underset{t\times t}{P_X}\,\underset{t\times n_c}{D_{12}} = \underset{n_c\times n_c}{E} \tag{11d}$$

由式(11c)左乘 P_XC^T 加式(11a)得:

$$(\underset{t\times t}{N} + \underset{t\times t}{P_X}\,\underset{t\times n_c}{C^T}\,\underset{n_c\times t}{C}\,\underset{t\times t}{P_X})\underset{t\times t}{D_{11}} + \underset{t\times t}{P_X}\,\underset{t\times n_c}{C^T}\,\underset{n_c\times t}{D_{21}} = \underset{t\times t}{E} \tag{12}$$

由式(11a)左乘 C 得:

$$\underset{n_c\times t}{C}\,\underset{t\times t}{N}\,\underset{t\times t}{D_{11}} + \underset{n_c\times t}{C}\,\underset{t\times t}{P_X}\,\underset{t\times n_c}{C^T}\,\underset{n_c\times t}{D_{21}} = \underset{n_c\times t}{C} \tag{13}$$

因 $\underset{n_c\times t}{C}\,\underset{t\times t}{P_X}\,\underset{t\times n_c}{C^T}$ 是 $n_c\times n_c$ 满秩方阵,有凯来逆,由式(13)解 D_{21}:

$$\underset{n_c\times t}{D_{21}} = (\underset{n_c\times t}{C}\,\underset{t\times t}{P_X}\,\underset{t\times n_c}{C^T})^{-1}(\underset{n_c\times t}{C} - \underset{n_c\times t}{C}\,\underset{t\times t}{N}\,\underset{t\times t}{D_{11}}) \tag{14}$$

将式(14)代入式(12)有

$$[(N + P_XC^TCP_X) - P_XC^T(CP_XC^T)^{-1}CN]D_{11} = E - P_XC^T(CP_XC^T)^{-1}C \tag{15}$$

$$D_{11} = [(N + P_XC^TCP_X) - P_XC^T(CP_XC^T)^{-1}CN]^{-1}[E - P_XC^T(CP_XC^T)^{-1}C] \tag{16}$$

令 $R = D_{11}$,则未知数的解可简写为

$$X = RA^TPL \tag{17}$$

式(17)为各类平差问题的通解,在平差计算时只需要存储标准法方程系数阵 N,未知数先验权阵 P_X 和条件系数阵 C,则可以由协方差传播律计算出未知数的协因数阵:

$$Q_X = RNR \tag{18}$$

当 C 等于 G ($GA^T = 0$)时,由于 $GA^T = 0$, $GA^TPA = GN = 0$,式 (17)变为

$$X = (N + P_X G^T G P_X)^{-1} A^T PL \tag{19}$$

即加权秩亏自由网平差。若 $C = G$,且 $P_X = E$,则为普通秩亏自由网平差 (最小范数解)。

有了各类平差问题的通用解式 (17),进行各类平差问题的转换就比较容易,因为法方程系数阵在所有平差方法中是相同的,不同之处只是未知数先验权阵 P_X 和条件系数阵 C,用不同的 P_X 和 C代入 (17)即可获得相对应的解。

例如,已知普通秩亏自由网的平差结果 X_r、N、G,现在需要将其转换到经典自由网平差的结果 X_c。根据法方程,首先计算:

$$A^TPL = NX = NX_r \tag{20}$$

将上式代入式 (17):

$$X_c = [(N + C^TC) - C^T(CC^T)^{-1}CN]^{-1} \times [E - C^T(CC^T)^{-1}C]NX_r \tag{21}$$

计算协因数阵时只需将式 (18)中的 R取为

$$R = [(N + C^TC) - C^T(CC^T)^{-1}CN]^{-1} \times [E - C^T(CC^T)^{-1}C] \tag{22}$$

在计算平差值的精度时,必须知道单位权方差 σ^2,在自由网平差中 (除附合网外),一旦观测网形和观测方案确定,单位权方差是惟一的:

$$\sigma^2 = \frac{V^TPV}{n + n_c - t} \tag{23}$$

n为观测数, t为未知数个数, n_c为条件个数。

自由网平差的基准问题实质上是一个坐标系问题,一旦基准确定,该基准就决定了一个坐标系,因此普通自由网平差结果与经典自由网平差结果还可以通过坐标相似变换进行转换,与上述转换结果在理论上是一致的。

3 参数约束平差

上节讨论的是自由网和强制附合网的平差模型。除纯线性平差问题 (如水准网,各个测站的近似高程可以是任意的)外。大多数平差问题需要知道坐标的近似值,而且在许多测量问题中坐标近似值的概略精度是知道的,这些近似值或是先前多期观测的结果,或是在起算数据的基础上用观测值推算的,两种情况都可以获得近似值的概略精度。此时可以按附有未知数先验精度的平差模型进行平差,平差模型为

$$\begin{cases} V = A\delta X - L, P \\ V_X = \delta X, P_X \end{cases} \tag{24}$$

P_X 为近似值的权阵,上式的最小二乘解 ($V^TPV + \delta X^T P_X \delta X = \min$,与 TIKHONOV准则相似[9])为

$$\delta X = (A^TPA + P_X)^{-1} A^T PL \tag{25}$$

$$Q_{\delta X} = (N + P_X)^{-1} N (N + P_X)^{-1} \tag{26}$$

考虑到 $X = X_0 + \delta X$, X的权逆阵应为[2]

$$Q_X = (N + P_X)^{-1} \tag{27}$$

具有先验精度的平差模型可以认为是各种平差模型的近似处理方案,其结果取决于给定未知数不同的权,一般为对角阵。未知参数的先验权 P_X 由观测值精度 σ和参数的先验精度 σ_X 决定,因此这种权又称为参数约束,本文将具有先验精度信息的平差问题扩展为参数约束平差。对未知数取较大的权时 (此时,未知数的近似值精度较高),称为强约束,反之为弱约束。在参数约束平差法中,为了在数值上统一自由网平差,权的定义不一定按实际的近似值精度赋权,针对自由网平差类型分为以下 5种情况定权:

1) 若代表基准点的未知数取较大的权,而其余点的权足够小,此时的解对应经典自由网平差结果 (具有足够起算数据);

2) 若所有未知数取相同的权,并适当小于某一参数时,其解与普通秩亏自由网平差的结果相近;

3) 对超过基准个数的未知数取较大的权时,其结果对应于附合网平差;

4) 对超过基准个数的部分未知数取相同的较小的权,且其它未知数的权取相对无穷小时,对应于拟稳平差的结果;

5) 按实际的参数精度定义权,具有先验精度信息的平差解。

实际上,先验信息的应用可以提供网平差的参考基准[5],因此可以认为 P_X 实质上就是参数约束平差的基准。需要注意的是,在用参数约束平差代替普通秩亏自由网平差和拟稳平差时,权逆阵应采用式 (26)计算,因为普通秩亏自由网平差和拟稳平差不考虑重心点的绝对精度。参数约束平差形式上与附有先验精度的参数平差相同,但参数约束有时可以不根据实际的近似坐标精度进行约束,在处理非病态问题时可以适当放宽。参数约束平差模型,特别是在未知数较多、基准条件复杂的非线形平差问题中具有较大的优势。它具有如下特点:

1)可以解决自由网平差的秩亏问题;

2)在满秩情况下它可以解决法方程的病态问题;

3)在自由网平差中,其解满足

$$\sum P_X \delta X \approx 0 \tag{28}$$

4) 若某些参数近似精度较高 (强约束),具有一定抗差能力。

参数约束平差的关键是正确定义未知数的权矩阵,为此,需要知道观测值的先验精度和参数的近似精度,对于精度信息不太明确的参数宁可采用松约束,即将其权定义为相对无穷小。无论采用何种平差模型,如果是非线性的,近似坐标的选取应满足线性化的精度,否则需要迭代处理,一旦近似坐标固定,矩阵 N 也就固定了。

4 参数约束平差法统一自由网平差算例

以情况较为复杂的二维测边网为例,如图 1。设 *A*、*B* 两点的坐标为已知,其余点的近似坐标由观测边长推算,见表 1。表 2为边长观测值,边长观测精度约为 4 cm。考虑到经典自由网平差两点的已知坐标和边长的一致性,观测边 1长度等于 *AB* 两点坐标的反算结果。

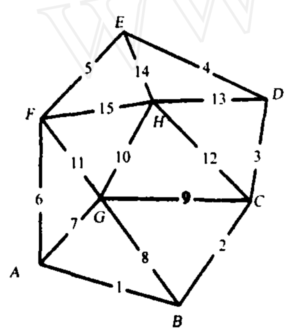

图 1 二维测边网

Fig 1 2D side-observed network

表 1 测边网坐标 (单位:m)

Tab. 1 Approximate coordinates of points(unit:m)

点号	近似坐标 X	近似坐标 Y	备注
A	40 049. 229	53 782. 790	已知
B	36 924. 728	61 027. 086	已知
C	40 843. 355	64 867. 962	②*GB*-*C*
D	47 943. 057	66 225. 723	④*HC*-*D*
E	53 743. 150	61 003. 647	⑤*HD*-*E*
F	48 681. 405	55 018. 412	⑥*AG*-*F*
G	43 767. 160	57 968. 596	①*AB*-*G*
H	48 580. 280	60 500. 369	③*GC*-*H*

表 2 观测边长 (单位:m)

Tab. 2 Observed length of sides(unit: m)

边号	边长	边号	边长	边号	边长
1	7 889. 381	6	8 720. 162	11	5 731. 788
2	5 487. 073	7	5 598. 570	12	8 884. 587
3	7 228. 367	8	7 494. 881	13	5 760. 706
4	7 804. 560	9	7 493. 323	14	5 187. 342
5	7 838. 880	10	5 438. 382	15	5 483. 158

本算例有 15个观测方程,16个坐标未知数,无论采用哪种平差,其法方程都是惟一的,首先计算出法方程 $NX = U$,自由网平差解为 $X = (N + G^TG)^{-1}U$,附合网按公式 (17)解算,参数约束平差解为 $X = (N + P_X)^{-1}U$。

1) 经典自由网 X_c

固定 *A* 点近似坐标及观测边 1的方位角,方位角由 *A*、*B* 点反算,基准条件为:

$$C = G_c = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$0\ 0\ -y_1+y_2\ x_1-x_2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$

用参数约束平差法实现时,P_X 取为:

$$\begin{cases} P_{X_i} = (4/0.001)^2, & i = 1\sim4 \\ P_{X_i} = (4/1000)^2, & i = 5\sim16 \end{cases}$$

2) 普通秩亏自由网平差 X_r

$$C = G_r = [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0$$
$$0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1$$
$$-y_1\ x_1\ -y_2\ x_2\ -y_3\ x_3\ -y_4\ x_4\ -y_5\ x_5\ -y_6\ x_6\ -y_7\ x_7\ -y_8\ x_8];$$

用参数约束平差法实现时,P_X 取为

$$P_{X_i} = (4/1000)^2,\ i = 1\sim16$$

3) 拟稳平差 X_q

$$C = G_q = [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$-y_1\ x_1\ -y_2\ x_2\ -y_3\ x_3\ -y_4\ x_4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$

用参数约束平差法实现时,P_X 取为

$$\begin{cases} P_{X_i} = (4/200)^2, & i = 1\sim8 \\ P_{X_i} = (4/10000)^2, & i = 9\sim16 \end{cases}$$

4) 附合网平差 Xe

设 *A*、*B*、*D*、*E* 4个点的坐标不变,此时附合网的条件矩阵为:

$$C = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$

此时,$CA^T \neq 0$按式 (17)计算坐标改正数。

用参数约束平差法实现时,P_X 取为

$$\begin{cases} P_{X_i} = (4/0.001)^2, & i = 1\sim4,\ 7\sim10 \\ P_{X_i} = (4/1000)^2, & i = 5\sim6,\ 11\sim16 \end{cases}$$

以上 4种平差方法的坐标改正数见表 3, 4种平差方法都可以用参数约束平差法实现,对应结果相

同。

表 3　不同平差方法的坐标改正数 (单位 :m)

Tab. 3　The coordinate corrections after difference adjustment methods(unit:m)

	经典自由网平差 X_c	秩亏自由网平差 X_r	拟稳平差 X_q	附合网平差 X_e
δx_A	0	-0.0360	-0.0354	0
δy_B	0	0.0035	-0.0118	0
δx_B	0	0.0172	0.0223	0
δy_B	0	0.0050	-0.0083	0
δx_C	-0.0350	0.0042	0.0117	0.0072
δy_C	0.0139	-0.0018	-0.0175	-0.0230
δx_D	-0.0552	-0.0070	0.0014	0
δy_D	0.1179	0.0577	0.0376	0
δx_E	-0.0025	0.0132	0.0184	0
δy_E	0.1780	0.0806	0.0569	0
δx_F	-0.0126	-0.0364	-0.0350	-0.0324
δy_F	-0.1244	-0.1894	-0.2100	-0.2452
δx_G	0.0310	0.0301	0.0333	0.0340
δy_G	0.0158	-0.0154	-0.0329	-0.0275
δx_H	0.0011	0.0147	0.0195	0.0121
δy_H	0.1232	0.0597	0.0392	0.0095
中误差 σ	0.043	0.043	0.043	0.040

5　结论

具有先验信息的平差与参数约束平差,不同之处在于:前者应根据实际的参数精度定义权阵,而后者的权阵可以根据平差类型任意定义,参数约束平差的范畴更大一些。参数约束平差通过对未知数定义适当的权,在数值上统一自由网平差和附合网平差。松约束可以实现普通秩亏自由网平差;对代表必要起算数据的基准点采用强约束可以实现经典自由网平差。参数约束平差的效果是待估参数在最小二乘的意义下围绕约束范围附近变化。由于这一特性,参数约束平差在数值计算上可以解决测量平差的基准问题,当具有强约束时,有较强的抗差和克服病态问题的能力,其数学模型和数值计算也比较简单。参数约束平差与(广义)阻尼最小二乘法、TIKHONOV准则形式上类似。在多数情况下,参数近似值的先验概略精度是已知的,在平差时应顾及一个物理观测过程的客观实际情况,纯数学上研究 P_X 意义不大。

References

1　陶本藻. 自由网平差与变形分析[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社, 2001.

1　Tao Benzao. Adjustment of freedom network and analysis of deformation [M]. Wuhan: Publishing House of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 2001. (in Chinese)

2　黄维彬. 近代平差理论及其应用[M]. 北京:解放军出版社, 1992.

2　Huang Weibin. Recent adjustments theories and applications [M]. Beijing: Liberation Arm Press, 1992. (in Chinese)

3　王穗辉. 顾及起算数据误差的附加基准平差[J]. 大地测量与地球动力学, 2005, 25(1): 72～75.

3　Wang Suihui. Adjustment method of appending datums taking initial data errors into account[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2005, 25(1): 72-75. (in Chinese)

4　王穗辉, 刘大杰. 附合网平差的基准与起始数据误差的影响[J]. 大地测量与地球动力学, 2004, 24(3): 19～23.

4　Wang Shuihui and Liu Dajie. Datum of parameter adjustment with redundant known conditions and influence of datum with errors[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2004, 24(3): 19-23. (in Chinese)

5　黄立人. 用于相对稳定点组判别的 QUAD 法[J]. 大地测量与地球动力学, 2002, 22(2): 10～15.

5　Huang Liren. QUAD method used for identifing relatively stable stations [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2002, 22(2): 10-15. (in Chinese)

6　Dong D, Herring T A, King R W. Estimating regional deformation from a combination of space and terrestrial geodetic data[J]. Journal of Geodesy, 1998, 72: 200-214.

7　隋立芬, 陶大欣. 多种顾及先验信息的平差及其比较[J]. 测绘工程, 2001, 10(4): 9～12.

7　Sui Lifen and Tao Daxin. Various adjustment methods of unknown parameters with prior information and comparison with each other [J]. Engineering of Surveying and Mapping, 2001, 10(4): 9-12. (in Chinese)

8　欧吉坤. 粗差的拟准检定法(QUAD法)[J]. 测绘学报, 1999, 28(1): 15～20.

8　Ou Jikun. Quasi-accurate detection of gross errors (QUAD) [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1999, 28(1): 15-20. (in Chinese)

9　Tikhonov A N and Arsenin V Y. Solutions of illposed problems[M]. New York: Wiley, 1977.