

地球正常密度假说

——重力学的参数椭球与纬向密度理论

Hypothesis of the Earth's Normal Density

—— The gravity theory of parameter spheroid and latitudinal density

郝晓光 方剑 刘根友 胡小刚 著

测绘出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

地球正常密度假说:重力学的参数椭球与纬向密度理论/郝晓光等著. -北京:测绘出版社,2009.7

ISBN 978-7-5030-1923-4

I. 地… II. 郝… III. 重力学 IV. P312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 109215 号

责任编辑 田 力 封面设计 占 燕 责任校对 董玉珍 李 艳 责任印制 金 君

出版发行 **测 绘 出 版 社**

社 址 北京西城区三里河路 50 号

邮政编码 100045

电 话 010-68531160(市场营销)

010-83543974 68512386(发行部)

电子信箱 smp@sinomaps.com

网 址 www.sinomaps.com

印 刷 ×××××印刷厂

经 销 新华书店

成品规格 169mm×239mm

印 张 8

字 数 180 千字

版 次 2009 年 7 月第 1 版

印 次 2009 年 7 月第 1 次印刷

印 数 0001-1000

定 价 26.00 元

书 号 ISBN 978-7-5030-1923-4/P·432

审 图 号 GS(2009)1126 号

如有印装质量问题,请与我社发行部联系

前 言

研究地球的形状和密度,是地球重力学的两项基本任务。在地球重力学中,研究地球形状的理论与方法已得到充分发展,而关于地球密度的理论与方法的研究则显得较为薄弱。经典的斯托克斯(G. G. Stokes)理论与莫洛坚斯基(M. S. Molodensky)理论都是以回避地球密度分布为数学前提来研究地球形状的。随着空间大地测量技术的迅速发展和地球形状学理论不断完善,地球形状不应该是地球重力学永远不变的主题,而对于地球整体密度分布方式的板块运动、地幔物质流动、海底扩张等新问题的不断出现,也要求地球重力学的研究重点从地球形状转移到地球密度上来。

特别是大陆漂移及板块运动的动力问题,自1901年休斯(E. Suess)在其名著《地球的面貌》中首次提出大陆漂移的概念到现在为止,这个问题已困扰了地球科学界达一百年之久,堪称地球科学的世纪之谜。虽然板块运动最有可能的动力是来自地幔的观点已被大多数地球科学家所共识,但由于地幔物质流动的成因至今尚未查明,使得现代板块构造学说的研究仍然处于“板块运动模型”阶段,而没有进入“板块动力模型”阶段。

按照地球重力学的基本范畴,现有研究“地球密度问题”的方法有三种:“平衡形状理论”、“等位椭球理论”和“内部边值理论”。前两种理论在《地球形状——理论大地测量学和地球内部物理学》(莫里茨,测绘出版社1992年版,陈俊勇、左传惠译)中、第三种理论在《地球重力场与内部物理——理论大地测量学若干问题的研究》(黄金水,中国科学院测量与地球物理研究所博士论文,1996)中,已作了详细的介绍,本书不再重复。

实际上,本书的旨趣并不在于对前人的工作进行总结和补充(总结和补充当然也是非常重要的),而在于尝试一种新的思路去追求地球重力学内在的逻辑美。正是在这种精神的指导下,本书提出了地球重力学研究地球密度问题的“参数椭球理论”、“纬向密度理论”、“地球正常密度假说”和“板块运动重力学机制”等基本观点。不言而喻,这种立意对于作者来说不仅是力不从心的而且是相当冒险的,故本书研究的内容和得到的结果也只能是泥沙俱下。但愿这种理性的冲动能够为地球重力学的理论研究注入新的活力,起到抛砖引玉的作用。

本书的出版得到国家自然科学基金(90814009)、中国科学院方向项目(KZCX2-YW-143)、国家自然科学基金(40774011)和中国科学院动力大地测量学重点实验室资助。

本书的基本内容来自第一作者的博士论文和博士后报告,感谢导师许厚泽院士和刘大杰教授;贾民育研究员和张赤军研究员审阅了本书的初稿,田力同志为本书的编辑出版付出了辛勤劳动,在此一并致谢。

作者
2009年1月

目 录

第 1 章 匀质椭球与水准椭球	(1)
§ 1.1 重力和重力位	(2)
§ 1.2 匀质椭球表面的重力	(3)
§ 1.3 水准椭球表面的重力	(5)
第 2 章 麦克劳林椭球与皮泽蒂椭球	(8)
§ 2.1 麦克劳林椭球的密度	(9)
§ 2.2 旋转椭球质面的引力位	(10)
§ 2.3 皮泽蒂椭球表面的重力	(11)
第 3 章 参数椭球表面的重力	(14)
§ 3.1 参数椭球概念	(15)
§ 3.2 匀质椭球外部的引力	(15)
§ 3.3 参数椭球表面的重力公式	(17)
§ 3.4 关于 c 和 e''	(20)
第 4 章 重力聚点	(21)
§ 4.1 三种椭球表面的重力	(22)
§ 4.2 密度分布定理与物质流动定理	(23)
§ 4.3 重力聚点与重力聚点定理	(25)
§ 4.4 参数椭球的物质扰动	(27)
第 5 章 参数椭球的数学性质	(28)
§ 5.1 参数椭球表面的引力位	(29)
§ 5.2 极点与赤道的重力等位条件	(30)
§ 5.3 极点与赤道重力等位条件下的界面扩张	(32)
§ 5.4 参数椭球与麦克劳林椭球的数学关系	(34)

第 6 章 参数椭球的准等位条件	(35)
§ 6.1 准等位条件一	(36)
§ 6.2 准等位条件二	(37)
§ 6.3 等位条件一	(38)
§ 6.4 等位条件二	(39)
§ 6.5 准等位条件的极限内密度	(41)
§ 6.6 准等位条件的密度分布	(42)
第 7 章 地球纬向正常密度函数	(44)
§ 7.1 由几何扁率到密度扁率的联想	(45)
§ 7.2 纬向密度概念	(46)
§ 7.3 极点重力纬向密度积分公式	(47)
§ 7.4 赤道重力纬向密度积分公式	(48)
§ 7.5 待定常数的求解与地球的密度扁率	(50)
§ 7.6 椭球质量检核	(51)
第 8 章 地幔纬向正常密度函数	(53)
§ 8.1 匀质地核椭球在赤道与极点的引力	(54)
§ 8.2 地幔纬向正常密度函数	(55)
§ 8.3 地幔极点重力纬向密度积分公式	(56)
§ 8.4 地幔赤道重力纬向密度积分公式	(58)
§ 8.5 待定常数的求解与地幔密度扁率	(60)
§ 8.6 “剩余重力扁率”与密度扁率的数量关系	(61)
第 9 章 似水准椭球	(63)
§ 9.1 “匀质分层”模式的似水准椭球	(64)
§ 9.2 “整体纬向”模式的似水准椭球	(65)
§ 9.3 “内匀外纬”模式的似水准椭球	(66)
§ 9.4 “内匀外纬-似水准椭球”与皮泽蒂椭球和杰弗里斯-布伦模型 的比较	(68)
第 10 章 地球正常密度假说	(70)
§ 10.1 地球正常密度概念	(71)

§ 10.2	地球正常密度假说的基本观点	(71)
§ 10.3	地幔水平重力模式	(72)
§ 10.4	理想地幔的正常重力位	(73)
§ 10.5	对钱氏极限的相关思考	(75)
第 11 章	板块运动重力学机制	(77)
§ 11.1	板块运动模型	(78)
§ 11.2	从大陆漂移假说到板块构造学说的发展	(79)
§ 11.3	板块运动重力学机制的基本观点	(81)
§ 11.4	盆山耦合现象	(83)
§ 11.5	软流圈板块概念	(84)
第 12 章	重力微分公式	(85)
§ 12.1	相对于深度参数的微分公式	(86)
§ 12.2	相对于密度参数的微分公式	(88)
§ 12.3	相对于地幔密度异常的微分公式	(89)
第 13 章	正常密度假说与均衡假说及内波假说的比较	(92)
§ 13.1	密度分布与补偿作用	(93)
§ 13.2	构造形态与运动方式	(93)
§ 13.3	力学性质与演变机制	(94)
§ 13.4	正常密度假说与内波假说的比较	(94)
第 14 章	基于新编《系列世界地图》的全球板块分布图	(97)
§ 14.1	世界地图的“双经双纬”概念	(98)
§ 14.2	“纬向世界地图”的投影方法	(98)
§ 14.3	研究板块动力问题的图形工具	(99)
第 15 章	存在问题与研究方向	(103)
§ 15.1	地球密度扁率与纬向密度函数	(104)
§ 15.2	正常密度分布的唯一性问题	(104)
§ 15.3	分层纬向正常密度函数	(105)
§ 15.4	重力异常解算密度异常的方法	(105)

§ 15.5	密度异常与重力异常的比较	(106)
§ 15.6	青藏高原隆起与大陆动力学研究	(106)
§ 15.7	环太平洋地震带的形成机理	(107)
§ 15.8	汶川大地震及青藏高原“物质东流”成因研究	(107)
§ 15.9	“华北克拉通破坏”的机制研究	(107)
参考文献		(109)
后记		(115)

CONTENTS

CHAPTER 1 Homogeneous Spheroid and Level Spheroid	(1)
§ 1.1 Gravity and Geopotential	(2)
§ 1.2 Gravity on Homogeneous Spheroid	(3)
§ 1.3 Gravity on Level Spheroid	(5)
CHAPTER 2 Maclaurin Spheroid and Pizzetti Spheroid	(8)
§ 2.1 Density of Maclaurin Spheroid	(9)
§ 2.2 Gravitation Potential of Spheroid' Shell	(10)
§ 2.3 Gravity on Pizzetti Spheroid	(11)
CHAPTER 3 Gravity on Parameter Spheroid	(14)
§ 3.1 Concept of Parameter Spheroid	(15)
§ 3.2 Gravitation Outside Homogeneous Spheroid	(15)
§ 3.3 Gravity Formula of Parameter Spheroid	(17)
§ 3.4 c and e''	(20)
CHAPTER 4 Gravity Assembly Point	(21)
§ 4.1 Gravity on the Three Spheroids	(22)
§ 4.2 Theorem of Density Distribution and Theorem of Matter Flow	(23)
§ 4.3 Theorem of Gravity Assembly Point	(25)
§ 4.4 Matter Disturbance of Parameter Spheroid	(27)
CHAPTER 5 Mathematical Property of Parameter Spheroid	(28)
§ 5.1 Gravitation Potential on Parameter Spheroid	(29)
§ 5.2 Condition of Gravity Potential Equality for Pole and Equator	(30)
§ 5.3 Boundary Expand under Condition of Gravity Potential Equality for Pole and Equator	(32)
§ 5.4 Mathematical Relation between Parameter Spheroid and Maclaurin Spheroid	(34)

CHAPTER 6	Quasi Level Condition of Parameter Spheroid	(35)
§ 6.1	The First Quasi Level Condition	(36)
§ 6.2	The Second Quasi Level Condition	(37)
§ 6.3	The First Level Condition	(38)
§ 6.4	The Second Level Condition	(39)
§ 6.5	The Limit of Inner Density at the Condition of Quasi Level	(41)
§ 6.6	The Density Distribution at the Condition of Quasi Level	(42)
CHAPTER 7	Latitudinal Normal Density Function of the Earth	(44)
§ 7.1	Association from Geometry Flattening to Density Flattening	(45)
§ 7.2	Concept of Latitudinal Density	(46)
§ 7.3	Pole Gravity Integral Formula of Latitudinal Density	(47)
§ 7.4	Equator Gravity Integral Formula of Latitudinal Density	(48)
§ 7.5	Calculation of Undetermined Constants and the Earth's Density Flattening	(50)
§ 7.6	Examination of Spheroid's Mass	(51)
CHAPTER 8	Latitudinal Normal Density Function of Mantle	(53)
§ 8.1	Gravitation of Homogeneous Core Spheroid at Equator and Pole	(54)
§ 8.2	Latitudinal Normal Density Function of Mantle	(55)
§ 8.3	Mantle Pole Gravity Integral Formula of Latitudinal Density	(56)
§ 8.4	Mantle Equator Gravity Integral Formula of Latitudinal Density	(58)
§ 8.5	Calculation of Undetermined Constants and Mantle's Density Flattening	(60)
§ 8.6	Relation of Remain Gravity Flattening and Density Flattening	(61)
CHAPTER 9	Quasi Level Spheroid	(63)
§ 9.1	Quasi Level Spheroid with Uniform Density Layered	(64)
§ 9.2	Quasi Level Spheroid with Entirely Latitudinal Density	(65)
§ 9.3	Quasi Level Spheroid with Uniform Density Inside and Latitudinal Density Outside	(66)
§ 9.4	Comparison of Quasi Level Spheroid with Pizzetti Spheroid and Jeffreys-Bullen Model	(68)

CHAPTER 10	The Earth's Normal Density Hypothesis	(70)
§ 10.1	Concept of the Earth's Normal Density	(71)
§ 10.2	Standpoint for the Earth's Normal Density Hypothesis	(71)
§ 10.3	Pattern of Horizontal Gravity in Mantle	(72)
§ 10.4	Normal Geopotential of Ideal Mantle	(73)
§ 10.5	Consideration of Chandrasekhar' Utmost	(75)
CHAPTER 11	Gravity Mechanism of Plate Movement	(77)
§ 11.1	Plate Movement Model	(78)
§ 11.2	Development from Continental Drift Hypothesis to Plate Tectonics Theory	(79)
§ 11.3	Standpoint for Gravity Mechanism of Plate Movement	(81)
§ 11.4	Coupling of Basin and Mountain	(83)
§ 11.5	Concept of Asthenosphere Plate	(84)
CHAPTER 12	Formula of Gravity Differential Coefficient	(85)
§ 12.1	Differential Coefficient Formula for Interface Depth Parameter	(86)
§ 12.2	Differential Coefficient Formula for Density Parameter	(88)
§ 12.3	Differential Coefficient Formula for Density Anomaly of Mantle	(89)
CHAPTER 13	Comparison of Normal Density Hypothesis with Isostatics and Internal Wave Hypothesis	(92)
§ 13.1	Density Distribution and Compensation	(93)
§ 13.2	Constitution and Movement	(93)
§ 13.3	Dynamical Property and Evolution Mechanism	(94)
§ 13.4	Comparison of Normal Density Hypothesis with Internal Wave Hypothesis	(94)
CHAPTER 14	Global Plate Map Based on New Series World Map	(97)
§ 14.1	Concept of Twin Longitude and Twin Latitude for World Map	(98)
§ 14.2	Projection Method of Latitudinal World Map	(98)
§ 14.3	New Map Tool for Research on Mechanism of Plate Movement	(99)

第 1 章 匀质椭球与水准椭球

CHAPTER 1 Homogeneous Spheroid and Level Spheroid

Abstract: The normal gravity model of the Earth is the level spheroid, or the normal equipotential spheroid. Constraining by equipotential condition, the level spheroid is not a homogeneous spheroid. The surface gravity of the level spheroid can be calculated by using Stokes Law without needing to consider the inner density distributions of the spheroid. It means that the inner density distributions of the normal gravity model of the Earth are unknown. In this Chapter, we study the non-homogeneous effects of level spheroid on surface gravity by comparing the gravity on the level spheroid with that on the homogeneous spheroid. we first deduce a formula for calculating surface gravity of homogeneous spheroid, and then we get the gravity difference between homogeneous spheroid and the level spheroid. Both models are built based on the four basic parameters (a, b, GM, ω) from Geodetic Reference System 1980. Our results show that non-homogeneous of the level spheroid causes the gravity difference at 1.135402 Gal.

地球正常重力是水准椭球定义的,重力异常是实测重力与正常重力之差。有文献称实测重力减去正常重力为重力测量的“纬度改正”,这样说很容易使人产生误解,因为“纬度改正”听起来好像纯粹是由地球形状引起的“几何改正”。产生这种误解并不奇怪,因为斯托克斯(G. G. Stokes)定理的基本精神就是“研究地球形状无需了解地球密度”。然而,如果将这一基本精神超常发挥,就会产生“研究地球重力学无需了解地球密度”、“水准椭球的密度分布无关紧要”、“水准椭球与匀质椭球没有多大区别”等一系列的想法。由于水准椭球的密度为非均匀分布,非均匀密度分布对水准椭球表面重力产生影响,使得经“纬度改正”后的重力异常含有非均匀的密度因素,故不能认为采用水准椭球表面重力进行的“纬度改正”是一种“纯几何改正”。受斯托克斯定理支撑,用这种受到未知非匀质密度影响的重力异常来研究地球形状是不成问题的。但是,采用受到未知非匀质密度影响的重力异常来研究地球密度则就不合适了。水准椭球的密度分布是未知的,但水准椭球表面重力是已知的,这就使我们有可能通过研究匀质椭球表面重力与水准椭球表面重力的差别,来研究水准椭球密度分布与匀质椭球密度分布的差别。

本章首先推导了匀质椭球表面重力的封闭公式,然后,基于1980大地参考系统四基本常数(a, b, GM, ω),计算出匀质椭球表面重力与水准椭球表面重力的差别,明确了水准椭球非匀质密度的重力总效应为 1.135402 伽(cm/s^2)^{*}。

§1.1 重力和重力位

根据牛顿的万有引力定律,空间两个质点 m 和 m' 之间的距离为 r 时,则其间的引力为

$$F = G \frac{mm'}{r^2}$$

式中, G 为万有引力常数,单位为 $\text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$,其值为

$$G = 6.67 \times 10^{-8}$$

若 m 为吸引质量, m' 为被吸引质量,当被吸引质量为单位质点时,则

$$F = G \frac{m}{r^2} \quad (1-1)$$

若被吸引点的坐标为 (x', y', z') ,吸引点坐标为 (x, y, z) ,则

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

* “伽”是厘米每二次方秒的专门名称,用于重力加速度(简称重力),常见于地球物理学与大地测量学中,符号为Gal。国际计量局将它列为暂时与国际单位制并用的计量单位。 $1\text{Gal} = 10^{-2} \text{m/s}^2 = 1 \text{cm/s}^2$,可冠以词头,如常用的mGal(毫伽)等。

因此,引力在 x, y, z 方向的分量分别为

$$X = Gm \frac{x' - x}{r^3}, \quad Y = Gm \frac{y' - y}{r^3}, \quad Z = Gm \frac{z' - z}{r^3} \quad (1-2)$$

总引力为

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

若吸引质量不是一个质点,则式(1-2)变为

$$X = G \int_{\tau} \delta \frac{x' - x}{r^3} d\tau, \quad Y = G \int_{\tau} \delta \frac{y' - y}{r^3} d\tau, \quad Z = G \int_{\tau} \delta \frac{z' - z}{r^3} d\tau \quad (1-3)$$

式中, δ 为密度分布函数。

由式(1-2)和式(1-3)可以看出,引力是一个函数对坐标 x', y', z' 的偏导数。设这个函数为引力位 V , 则

$$V(x', y', z') = -\frac{Gm}{r} \text{ 或 } V(x', y', z') = -G \int_{\tau} \frac{\delta d\tau}{r} \quad (1-4)$$

$$X = \frac{\partial V}{\partial x'}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y'}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z'} \quad (1-5)$$

在以 ω 为角速度的旋转坐标系中,被吸引点受到的离心力为

$$P = \omega^2 \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (1-6)$$

离心力位为

$$Q = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (1-7)$$

重力为引力与离心力之矢量和,重力位为引力位与离心力位之和,即

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} + \mathbf{P}, \quad W = V + Q \quad (1-8)$$

§1.2 匀质椭球表面的重力

球表面的重力比较容易求解,但求解椭球表面的重力则比较复杂,若旋转椭球表面的方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{b^2} = 1$$

式中, a 为旋转椭球的长半轴; b 为短半轴。球坐标与直角坐标的换算公式为

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \lambda = \frac{a^2 \cos B \cos \lambda}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \\ y &= \rho \sin \theta \sin \lambda = \frac{a^2 \cos B \sin \lambda}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad z = \rho \cos \theta = \frac{b^2 \sin B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \\ \cos \theta &= \frac{b^2 \sin B}{\rho \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad \sin \theta = \frac{a^2 \cos B}{\rho \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \end{aligned}$$

式中, θ 为极距; λ 为经度; B 为椭球地理纬度。

由引力位理论可知, 匀质旋转椭球体内部点的引力分量为

$$F_{x'} = G\delta_0 \int_{\tau} \frac{\xi - x'}{r^3} d\tau, \quad F_{y'} = G\delta_0 \int_{\tau} \frac{\eta - y'}{r^3} d\tau, \quad F_{z'} = G\delta_0 \int_{\tau} \frac{\zeta - z'}{r^3} d\tau$$

式中, (x', y', z') 为椭球内部任意点坐标; (ξ, η, ζ) 为椭球内积分流动点坐标。

对上式积分, 可得^[1]

$$F_{x'} = Px', \quad F_{y'} = Py', \quad F_{z'} = Qz'$$

$$P = 2\pi G\delta_0 \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left(\arctane' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right), \quad Q = 4\pi G\delta_0 \frac{1 + e'^2}{e'^3} (e' - \arctane')$$
(1-9)

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad \delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b}$$

注意, 式中的 Q 不要和离心力位混淆。将匀质密度 δ_0 代入式(1-9), 得

$$\begin{cases} P = \frac{3GM}{2e'^3 b^3} \left(\arctane' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \\ Q = \frac{3GM}{e'^3 b^3} (e' - \arctane') \end{cases}$$
(1-10)

于是, 匀质椭球的内部重力为

$$\mathbf{g}_i = (P - \omega^2)x'i + (P - \omega^2)y'j + Qz'k$$

因质体引力位及其一阶导数为连续函数, 故内部重力公式也适用于表面重力。

于是, 匀质椭球的表面重力为

$$\mathbf{g}_0 = (P - \omega^2)xi + (P - \omega^2)yj + Qzk$$
(1-11)

式中, (x, y, z) 为椭球表面点的坐标。

对式(1-11)取模, 得

$$g_0 = |\mathbf{g}_0| = \sqrt{(P - \omega^2)^2 x^2 + (P - \omega^2)^2 y^2 + Q^2 z^2}$$

即

$$g_0 = \frac{\sqrt{(P - \omega^2)^2 a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B}}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}$$
(1-12)

分别令 $B = 0^\circ$ 、 $B = 90^\circ$, 则匀质椭球的赤道重力 g_e 和极点重力 g_p 为

$$g_e = (P - \omega^2)a, \quad g_p = Qb$$
(1-13)

将 g_e 和 g_p 代入式(1-12), 得匀质椭球表面重力的封闭公式为^[2]

$$g_0 = \frac{\sqrt{a^2 g_e^2 \cos^2 B + b^2 g_p^2 \sin^2 B}}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}$$
(1-14)

将 P 、 Q 的表达式代入 g_e 、 g_p 的表达式后, 得

$$\begin{cases} g_e = \frac{GM}{ab} \left[\frac{3}{2e'^2} \left(\frac{1+e'^2}{e'} \arctan e' - 1 \right) - m \right] \\ g_p = \frac{GM}{a^2} \frac{3(1+e'^2)}{e'^2} \left(1 - \frac{\arctan e'}{e'} \right) \end{cases} \quad (1-15)$$

式中, $m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$, 注意不要和前面的质量 m 混淆。

因匀质椭球表面非重力等位面, 故有必要匀质椭球表面重力的法向分量公式。因旋转椭球面单位法向矢量为

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}} \left(\frac{x}{a^2} \mathbf{i} + \frac{y}{a^2} \mathbf{j} + \frac{z}{b^2} \mathbf{k} \right)$$

坐标换算后, 匀质椭球的表面法向重力为

$$g_n = \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{n} = \frac{\rho}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{a^4} + \frac{\cos^2 \theta}{b^4}}} \left[\frac{(P - \omega^2) \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{Q \cos^2 \theta}{b^2} \right] = \frac{(P - \omega^2) a^2 \cos^2 B + Q b^2 \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}$$

在上式中, 分别令 $B = 0^\circ$ 、 $B = 90^\circ$, 可发现法向的赤道重力、极点重力与式(1-13)中的 g_e 和 g_p 的表达式完全相同, 故匀质椭球的表面法向重力的封闭公式为

$$g_n = \frac{a g_e \cos^2 B + b g_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (1-16)$$

§1.3 水准椭球表面的重力

斯托克斯定理: 重力等位面 σ 包含质量 M 并以角速度 ω 自转, 且 σ 外无质量, 那么在未知密度分布 δ 的情况下, 由 σ 、 M 和 ω 可唯一确定界面 σ 之上的重力位 $W_\sigma (= C)$ 和界面 σ 之外的重力位 W_e , 即 $W = W(\sigma, M, \omega)$ 。斯托克斯定理是经典地球重力学的基本定理, 它的巧妙之处在于绕开了地球的密度问题来研究地球的形状问题。有的文献将“在未知密度分布 δ 的情况下”写成“与密度分布 δ 无关”。这种写法容易产生误解, 即地球表面和外部的重力与地球的密度分布无关; 进一步可能产生的误解是地球密度分布的变化不会引起地球表面和外部的重力的变化。实际上, 地球表面和外部的重力 W_σ 和 W_e 将随着地球密度分布 δ 的变化而变化。从斯托克斯定理本身来说, 因为重力位 W 是由 σ 、 M 和 ω 唯一确定的, 如果 $\delta_1 \neq \delta_2$, 就可能导致 $\sigma_1 \neq \sigma_2$, 于是便得到 $W_1 \neq W_2$ 。

与斯托克斯定理相对应的地球模型是“水准椭球”。实际上, 水准椭球就是表

面为重力等位面 ($W_0 = C$) 的旋转椭球。1929 年,意大利的大地测量学家索米里安 (C. Somigliano) 推导出水准椭球表面的重力为^[3]

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (1-17)$$

因水准椭球的表面为重力等位面,所以水准椭球的表面法向重力与表面重力相等,其赤道重力 γ_e 与极点重力 γ_p 的封闭公式为

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_e &= \frac{GM}{ab} \left\{ 1 + m \frac{6(e' - \arctan e') - 2e'^3}{3[(3 + e'^2)\arctan e' - 3e']} \right\} \\ \gamma_p &= \frac{GM}{a^2} \left\{ 1 + m \frac{6(1 + e'^2)(e' - \arctan e') - 2e'^3}{3[(3 + e'^2)\arctan e' - 3e']} \right\} \end{aligned} \right\}, m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (1-18)$$

1979 年,国际大地测量协会提出了 1980 大地参考系统 (GRS 80)。它由代表相应正常重力场的地心水准椭球组成,并由以下参数定义。

地球椭球的长半径: $a = 637\,813\,700$ cm

含大气质量的地球引力常数: $GM = 3\,986\,005 \times 10^{14}$ cm³/s⁻²

地球动力形状因子: $J_2 = 1\,082.63 \times 10^{-6}$

地球自转角速度: $\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11}$ rad/s

由以上四个参数可导出地球椭球的短半径为: $b = 635\,675\,200$ cm。

采用 1980 大地参考系统中的四个基本常数 (a, b, GM, ω), 由式 (1-15)、式 (1-18) 可算得匀质椭球与水准椭球的赤道重力、极点重力分别为 (Gal)

$$\begin{aligned} g_e &= 978.412\,041 \text{ Gal}, & g_p &= 982.462\,550 \text{ Gal} \\ \gamma_e &= 978.032\,726 \text{ Gal}, & \gamma_p &= 983.218\,637 \text{ Gal} \end{aligned} \quad (1-19)$$

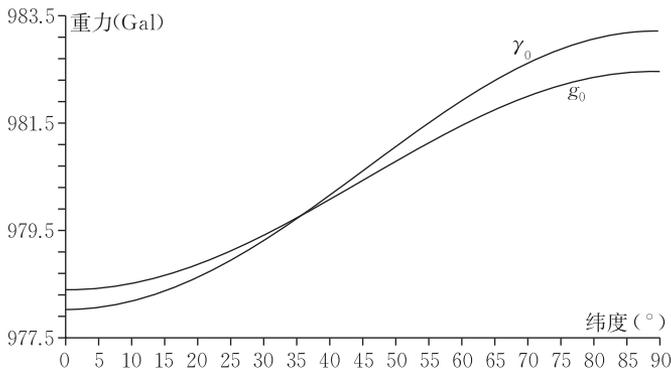


图 1-1 匀质椭球与水准椭球表面重力对比

在 1980 大地参考系统中, γ_e 、 γ_p 和 γ_0 值均采用近似公式计算,而式 (1-17) 的计算结果则略有不同 (γ_0 的偏差在全球约为 $-60 \times 10^{-3} \sim 40 \times 10^{-3}$ mGal)。为了

进行严格的数值对照,这里采用封闭公式进行计算。按式(1-14)和式(1-17)计算,由图 1-1 可见, g_0 曲线与 γ_0 曲线相互交叉、偏差较大,且两曲线的关系是非线性变化的。在赤道, $g_e - \gamma_e = 379.315(\text{mGal})$;在极点, $g_p - \gamma_p = -756.087(\text{mGal})$;因此,两椭球表面重力的偏差为 1.135 402 Gal。由于匀质椭球与水准椭球均采用 1980 大地参考系统中的四个基本常数计算椭球表面重力,故两曲线的偏差是由匀质椭球与水准椭球不同的密度分布造成的;也就是说,是由水准椭球的非匀质密度造成的。所以,水准椭球非匀质密度的重力总效应为: $379.315 \text{ mGal} + 756.087 \text{ mGal} = 1.135 402 \text{ Gal}$ 。

第 2 章 麦克劳林椭球与皮泽蒂椭球

CHAPTER 2 Maclaurin Spheroid and Pizzetti Spheroid

Abstract: The gravity potential of homogeneous spheroid surface isn't constant, or homogeneous spheroid isn't isopotential spheroid. Gravity potential of level spheroid surface is constant, but, its interior density isn't constant, this means that isopotential spheroid isn't homogeneous spheroid. Taking account of both aspects is C. Maclaurin spheroid, which is homogeneous isopotential spheroid, having the homogeneous and the isopotential, but its homogeneous density δ_m isn't arbitrary, Maclaurin spheroid matter M_m is larger than earth matter M . In 1894, P. Pizzetti used a layer gravitation potential as constant, but density as negative matter single layer spheroid surface wrapping Maclaurin spheroid, successfully offsetting Maclaurin spheroid more superfluous matter than the earth.

匀质椭球表面的重力位不是常数,这就是说,“匀质椭球”不是“等位椭球”。水准椭球表面的重力位是常数,但密度又不是常数,这就是说,“水准椭球”不是“匀质椭球”。能够兼顾二者的是麦克劳林(C. Maclaurin)椭球。麦克劳林椭球是一种“匀质等位椭球”,也就是说,麦克劳林椭球既是匀质椭球,又是等位椭球。但是,麦克劳林椭球的匀质密度不是独立的,而是有条件的。

§2.1 麦克劳林椭球的密度

旋转椭球的表面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

令

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

于是,椭球表面的单位法向矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \times \left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}} \times \left(\frac{x}{a^2}\mathbf{i} + \frac{y}{a^2}\mathbf{j} + \frac{z}{b^2}\mathbf{k}\right) \end{aligned} \quad (2-1)$$

由本书第1章可知,匀质旋转椭球的表面重力为

$$\mathbf{g} = (P - \omega^2)x\mathbf{i} + (P - \omega^2)y\mathbf{j} + Qz\mathbf{k} \quad (2-2)$$

$$P = 2\pi G\delta \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left(\arctane' - \frac{e'}{1 + e'^2}\right), \quad Q = 4\pi G\delta \frac{1 + e'^2}{e'^3} (e' - \arctane') \quad (2-3)$$

由于麦克劳林椭球为等位椭球,表面重力位为常数,即重力位沿表面的梯度为零,即重力的水平分量为零;所以,重力一定垂直于椭球表面,所以 \mathbf{n} 与 \mathbf{g} 平行,所以二者的分量一定成比例,即

$$\frac{x/a^2}{(P - \omega^2)x} = \frac{y/a^2}{(P - \omega^2)y} = \frac{z/b^2}{Qz} \quad (2-4)$$

由式(2-4)可解得

$$(P - \omega^2)a^2 = b^2Q \quad (2-5)$$

可将式(2-5)称为匀质等位椭球的“麦克劳林条件”。将式(2-3)代入式(2-5),便得到麦克劳林椭球的密度和质量为

$$\delta_m = \frac{\omega^2 e'^3}{2\pi G[(3 + e'^2)\arctane' - 3e']}, \quad m_m = \frac{4}{3}\pi a^2 b \delta_m \quad (2-6)$$

由式(2-6)可见,麦克劳林椭球的匀质密度不是任意的,而是与椭球的角速度 ω 和长、短半轴 a 、 b 有一定的函数关系。匀质椭球的密度为

$$\delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b} \quad (2-7)$$

将 1980 大地参考系统的(a, b, GM, ω)分别代入式(2-6)和式(2-7),可得

$$\delta_m = 1.2871 \delta_0 \quad (2-8)$$

也就是说,等位匀质椭球的质量是普通匀质椭球质量的 1.2871 倍。

§2.2 旋转椭球质面的引力位

麦克劳林求出了既等位又匀质的椭球,只是他的这个匀质椭球是普通的匀质椭球质量的 1.2871 倍。1894 年,皮泽蒂(P. Pizzetti)用一层密度为负数的单层椭球面包裹在麦克劳林椭球上,成功地将麦克劳林椭球比普通匀质椭球多的那部分质量抵消掉。这层“负质量”的面密度为^[1]

$$\mu = \frac{m_{\text{面}}}{4\pi a^2 b} (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}} \quad (2-9)$$

式中, $m_{\text{面}}$ 为单层椭球面的质量。

设两个相似旋转椭球构成椭球壳,外表面的长半轴为 a ,内表面的长半轴为 αa ($\alpha < 1$)。对小椭球内部的点来说,椭球壳的引力位等于大、小两个匀质椭球的引力位之差。对式(1-11)积分可知,匀质旋转椭球的内部引力位为

$$V_i = -\frac{1}{2}Px^2 - \frac{1}{2}Py^2 - \frac{1}{2}Qz^2 + K$$

式中, K 为积分常数,等于旋转椭球中心的引力位,可解算为^[1]

$$K = 2\pi G\delta \frac{a^2}{e'} \arctan e' \quad (2-10)$$

所以,椭球壳内部点的引力位为

$$V_i^{\text{壳}} = V_i - V_i^\alpha = K - K^\alpha = 2\pi G\delta a^2 \frac{1 - \alpha^2}{e'} \arctan e' \quad (2-11)$$

椭球壳的质量为

$$m_{\text{壳}} = \frac{4}{3}\pi\delta(a^2 b - \alpha^3 a^2 b) \quad (2-12)$$

将式(2-12)代入式(2-11)可得

$$V_i^{\text{壳}} = \frac{3Gm_{\text{壳}}}{2a} \frac{\sqrt{1 + e'^2}}{e'} \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^3} \arctan e' \quad (2-13)$$

令 $\alpha \rightarrow 1$, 可得旋转椭球质面内部的引力位为

$$V_i^{\text{面}} = \frac{Gm_{\text{面}}}{a} \frac{\sqrt{1+e'^2}}{e'} \arctan e' \quad (2-14)$$

由式(2-14)可见,旋转椭球质面的内部引力位为常数。由质面引力位的连续性可知,旋转椭球质面的表面引力位也为常数,也就是说,旋转椭球质面是等引力位面。

§2.3 皮泽蒂椭球表面的重力

由于旋转椭球质面为等引力位面,若将麦克劳林椭球与等引力位的旋转椭球质面叠加在一起,其表面仍然是重力等位面,这就是皮泽蒂椭球,其表面的重力为

$$\gamma_0 = |\mathbf{g}_1| + |\mathbf{F}_2| \quad (2-15)$$

式中, \mathbf{g}_1 为麦克劳林椭球的重力; \mathbf{F}_2 为椭球质面的引力。

因为麦克劳林椭球为匀质椭球,所以

$$|\mathbf{g}_1| = -\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{n} = -\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{(\omega^2 - P)(x^2 + y^2)}{a^2} - \frac{Qz^2}{b^2} \right] = \\ -\rho \left(\frac{\sin^2 \theta}{a^4} + \frac{\cos^2 \theta}{b^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{(\omega^2 - P)\sin^2 \theta}{a^2} - \frac{Q\cos^2 \theta}{b^2} \right]$$

又因为麦克劳林椭球为等位椭球,所以可将式(2-5)代入上式得

$$|\mathbf{g}_1| = -\rho \left(\frac{\sin^2 \theta}{a^4} + \frac{\cos^2 \theta}{b^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{b^2 Q \sin^2 \theta}{a^4} + \frac{Q \cos^2 \theta}{b^2} \right) = \\ \rho Q \frac{\left(\frac{b^4}{a^4} \right) \tan^2 \theta + 1}{\left[\left(\frac{b^4}{a^4} \right) \tan^2 \theta + 1 \right]^{\frac{1}{2}} (1 + \tan^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} = \rho Q \left[\frac{\left(\frac{b^4}{a^4} \right) \tan^2 \theta + 1}{(1 + \tan^2 \theta)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-16)$$

由三角函数代换,再将含有麦克劳林椭球密度的 Q 代入得

$$|\mathbf{g}_1| = \frac{4\pi G \delta_m b^2 (1 + e'^2) (e' - \arctan e')}{e'^3 (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}}$$

将 δ_m 换成麦克劳林椭球的质量 m_m 得

$$|\mathbf{g}_1| = \frac{3Gm_m b (1 + e'^2) (e' - \arctan e')}{a^2 e'^3 (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \quad (2-17)$$

因皮泽蒂椭球的总质量为 M , 所以将式(2-9)中的 $m_{\text{面}}$ 用 $M - m_m$ 代替,得

$$\mu = \frac{M - m_m}{4\pi a^2 b} (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}} \quad (2-18)$$

由式(2-14)可知,旋转椭球面内部的引力位为常数,所以旋转椭球质面的引力

在内部处处为零。另由质面引力位一阶导数的不连续性可知,质面的引力在经过质面时跳跃 $4\pi G\mu$ 。所以,旋转椭球质面表面的引力为 $4\pi G\mu$,将式(2-12)代入可得^[1]

$$|F_2| = 4\pi G\mu = \frac{G(M - m_m)}{a^2 b} (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}} \quad (2-19)$$

最后,将式(2-17)和式(2-19)相加可得

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{GM}{a(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{3m_m b}{Ma} \frac{1 + e'^2}{e'^2} (e' - \arctan e') + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{ab} \left(1 - \frac{m_m}{M} \right) (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B) \right\} = \\ &= \frac{GM}{a(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{3m_m b}{Ma} \frac{1 + e'^2}{e'^2} (e' - \arctan e') \times \right. \\ &\quad \left. (e' - \arctan e') + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{m_m}{M} \right) \right\} \sin^2 B = \\ &= \frac{GM}{a(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{a}{b} \left[1 + \frac{3(e' - \arctan e') - e'^2}{e'^3} \frac{m_m}{M} \right] \cos^2 B + \right. \\ &\quad \left. \frac{b}{a} \left[1 + \frac{3(1 + e'^2)(e' - \arctan e') - e'^3}{e'^3} \frac{m_m}{M} \right] \sin^2 B \right\} \quad (2-20) \end{aligned}$$

最后,将式(2-6) m_m 代入可得

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{GM}{a(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{a}{b} \left[1 + m \frac{6(e' - \arctan e') - 2e'^3}{3[(3 + e'^2)\arctan e' - 3e']} \right] \right. \\ &\quad \left. \cos^2 B + \frac{b}{a} \left[1 + m \frac{6(1 + e'^2)(e' - \arctan e') - 2e'^3}{3[(3 + e'^2)\arctan e' - 3e']} \right] \sin^2 B \right\} \quad (2-21) \end{aligned}$$

式中, $m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$ 。

这就是计算 γ_0 的最后公式,但我们还可以将它写成更简明的形式。在式(2-21)中,令 $B = 0$ 、 $B = \pm \frac{\pi}{2}$,得赤道、极点重力分别为

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left\{ 1 + m \frac{6(e' - \arctan e') - 2e'^2}{3[(3 + e'^2)\arctan e' - 3e']} \right\} \quad (2-22)$$

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left\{ 1 + m \frac{6(1 + e'^2)(e' - \arctan e') - 2e'^2}{3[(3 + e'^2)\arctan e' - 3e']} \right\} \quad (2-23)$$

于是,可将式(2-21)写成如下简单形式

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \quad (2-24)$$

将式(2-24)与式(1-19)和式(1-20)比较可知,皮泽蒂椭球表面的重力完全等于水准椭球表面的正常重力。皮泽蒂椭球的表面是重力等位面,所以皮泽蒂椭球也是一种“水准椭球”。而根据斯托克斯定理,水准椭球的密度分布是不用知道、也的确不知道的。但皮泽蒂椭球的密度分布是知道的,其内部是匀质的麦克劳林椭球,而表面是一层带“纬向密度分布”的质面,只是皮泽蒂椭球表面的纬向密度分布函数是负数,不符合地球的物理性质,但在数学上是非常成功的。

第3章 参数椭球表面的重力

CHAPTER 3 Gravity on Parameter Spheroid

Abstract: Twin-layer structure of Peizzetti spheroid causes us to establish a revolution spheroid with twin-layer structure, and the outer layer of twin-layer structure is no longer to have no thickness matter surface. It is well known that, sphere body gravitation problem is rather simple, but spheroid gravitation problem is more complex, I. Newton used proportion methods of several spheres to solve only gravitation proportion of homogeneous spheroid surface equator to pole, afterward, through researches of C. Maclaurin, K. G. J. Jacobi, J. L. Lagrange, P. S. Laplace, J. Ivory, M. Chasles et al, the problem of homogeneous spheroid gravitation has been solved. A new conception for parameter spheroid is presented in this chapter. The formula of parameter spheroid's gravity that contains interface depth parameter and density parameter are derived.

研究地球形状的主题是求解大地水准面,常规重力异常是由水准椭球定义的,由此产生的理论与方法受斯托克斯定理的支撑,避开了水准椭球的密度分布,解决了采用重力异常反演大地水准面的斯托克斯问题。研究地球密度是要研究地球的密度分布方式,不应该把研究地球形状的理论与方法照搬过来研究地球密度,科学研究的具体方法应跟随科研目的变更而发生相应的变化。研究地球密度不应采用回避密度分布的水准椭球,而应采用带密度参数和密度界面深度参数的“参数椭球”。

§3.1 参数椭球概念

“参数椭球”概念是相对“常数椭球”而言的,“常数椭球”(例如水准椭球或匀质椭球)的表面重力是“静止”的,“参数椭球”的表面重力是随密度参数和界面深度参数的变化而“运动”的;对照“参数椭球”的运动方式,可研究和探讨椭球内部的密度与界面的变化规律,以及这种规律与椭球表面重力的内在联系。也就是说,应该把“参数椭球”看成是研究地球密度的工具,而不应把它当成对地球密度进行近似模拟的地球模型。“参数椭球”是一种“分层旋转椭球”(仅考虑双层椭球)。椭球的引力问题比较复杂,牛顿(S. I. Newton)用了几个球体的比例方法,仅仅只求出了匀质椭球上赤道与极点的引力比例。后来,经过麦克劳林、雅可比(K. G. J. Jacobi)、拉格朗日(J. L. Lagrange)、拉普拉斯(P. S. Laplace)、艾复来(J. Ivory)及恰勒(M. Chasles)等人的研究,完备解决了匀质旋转椭球的引力问题。然而,地球并不是匀质的,但大体上是“分层”的。所以,以“匀质旋转椭球”引力为基础,研究“分层旋转椭球”的引力问题,在地球重力学中有重要意义。本章推导了满足1980大地参考系统四个基本常数(a, b, GM, ω)、带密度参数和界面深度参数的旋转椭球表面重力的封闭公式,提出了“参数椭球”概念,为地球重力学研究地球密度提供了一种数学方法。

§3.2 匀质椭球外部的引力

为了推导“参数椭球”表面的重力公式,必须先推导匀质椭球外部的引力公式。由式(1-9)、式(1-11)、式(2-13)和式(2-14)可知,匀质椭球表面引力位及表面重力为

$$V_0 = -\frac{1}{2}P_0x_0^2 - \frac{1}{2}P_0y_0^2 - \frac{1}{2}Q_0z_0^2 + K_0 \quad (3-1)$$

$$\mathbf{g}_0 = (P_0 - \omega^2)x_0\mathbf{i} + (P_0 - \omega^2)y_0\mathbf{j} + Q_0z_0\mathbf{k} \quad (3-2)$$

$$P_0 = 2\pi G\delta_0 \frac{1+e'^2}{e'^3} \left(\arctan e' - \frac{e'}{1+e'^2} \right), \quad \delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b} \quad (3-3)$$

$$Q_0 = 4\pi G\delta_0 \frac{1+e'^2}{e'^3} (e' - \arctan e'), \quad K_0 = 2\pi G\delta_0 \frac{a^2}{e'} \arctan e' \quad (3-4)$$

引力椭球的表面方程为

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{b^2} = \frac{\rho_0^2 \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\rho_0^2 \cos^2 \theta}{b^2} = 1, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

若引力椭球的一外部点坐标为 (x, y, z) 或 (ρ, θ, λ) , 过该点做与引力椭球同心、同轴、共焦、旋转、且质量为零的辅助椭球面, 则其方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + c} + \frac{z^2}{b^2 + c} = 1 \quad (3-5)$$

$$c > 0, \rho > \rho_0, e'_c{}^2 = \frac{(a^2 + c) - (b^2 + c)}{b^2 + c} = \frac{a^2 - b^2}{b^2 + c}$$

式中, $x = \rho \sin \theta \cos \lambda$; $y = \rho \sin \theta \sin \lambda$; $z = \rho \cos \theta$; θ 为极距; λ 为经度; B 为纬度。

$$\cos \theta = \frac{b^2 \sin B}{\rho_0 \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad \sin \theta = \frac{a^2 \cos B}{\rho_0 \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}$$

由式(3-5)解得

$$c^2 + [(a^2 + b^2) - (x^2 + y^2 + z^2)]c + [a^2(b^2 - z^2) - b^2(x^2 + y^2)] = 0$$

由式(3-5)定义可知, $c > 0$, 故取正根得

$$2c = \sqrt{(a^2 + b^2 - \rho^2)^2 + 4\rho^2(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) - 4a^2 b^2} - (a^2 + b^2 - \rho^2) = \sqrt{(a^2 + b^2 - \rho^2)^2 + 4a^2 b^2 \left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2} - 1 \right)} - (a^2 + b^2 - \rho^2) \quad (3-6)$$

关于匀质椭球的引力问题有三个定理^[3]。

艾复来第一定理: 若 p_1 及 q_1 为椭球面 E_1 上的两点, p_2 及 q_2 为与 E_1 同心、同轴、共焦的椭球面 E_2 上的对应点, 则 $p_1 q_2 = p_2 q_1$ 。

艾复来第二定理: 对同密度的两个同心、同轴、共焦的匀质椭球体 E_1 和 E_2 来说, E_1 对 E_2 表面上的点 p_2 的引力在任一方向的分力, 与 E_2 对 E_1 表面上的对应点 p_1 的引力在同方向的分力的比例, 等于这两个椭球在垂直该方向的截面面积的比例。

麦克劳林定理: 两个同心、同轴、共焦、等密度或不等密度的匀质椭球, 对同一外点的引力位的比例, 等于这两个椭球质量的比例。

由以上三定理可得匀质椭球外部引力位为

$$V_e = -\frac{1}{2}P_e x^2 - \frac{1}{2}P_e y^2 - \frac{1}{2}Q_e z^2 + K_e \quad (3-7)$$

$$P_e = 2\pi G\delta_0 \frac{1+e'^2}{e'^3} \left(\arctan e'_c - \frac{e'_c}{1+e'^2} \right), \quad e'_c = \frac{be'}{\sqrt{b^2 + c}} \quad (3-8)$$

$$Q_e = 4\pi G\delta_0 \frac{1+e'^2}{e'^3} (e'_c - \arctan e'_c), \quad K_e = 2\pi G\delta_0 \frac{a^2}{e'} \arctan e'_c \quad (3-9)$$

于是,匀质旋转椭球球体的外部引力分量为

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial V_e}{\partial x} = P_e x + \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \frac{\partial P_e}{\partial x} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial Q_e}{\partial x} - \frac{\partial K_e}{\partial x} \\ \frac{\partial P_e}{\partial x} &= 2\pi G\delta_0 \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{2e'^2}{(1+e'^2)^2} \frac{\partial e'_c}{\partial x} = \left(\frac{2\pi G\delta_0}{1+e'^2} \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{\partial e'_c}{1+e'^2} \right) \\ \frac{\partial Q_e}{\partial x} &= 4\pi G\delta_0 \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{e'^2}{1+e'^2} \frac{\partial e'_c}{\partial x} = \left(\frac{2\pi G\delta_0}{1+e'^2} \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{\partial e'_c}{\partial x} \right) (2e'^2) \\ \frac{\partial K_e}{\partial x} &= 2\pi G\delta_0 \frac{a^2}{e'} \frac{1}{1+e'^2} \frac{\partial e'_c}{\partial x} = \left(\frac{2\pi G\delta_0}{1+e'^2} \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{\partial e'_c}{1+e'^2} \right) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} F_x &= P_e x + \left(\frac{2\pi G\delta_0}{1+e'^2} \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{\partial e'_c}{\partial x} \right) \left[\left(\frac{2e'^2}{1+e'^2} \right) \frac{x^2 + y^2}{2} + (2e'^2) \frac{z^2}{2} - \left(\frac{a^2 e'^2}{1+e'^2} \right) \right] = \\ &P_e x + \left(\frac{2\pi G\delta_0}{1+e'^2} \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{\partial e'_c}{\partial x} \right) \left[(a^2 - b^2) \frac{x^2 + y^2}{a^2 + c} + (a^2 - b^2) \frac{z^2}{b^2 + c} - (a^2 - b^2) \right] = \\ &P_e x + (a^2 - b^2) \left(\frac{2\pi G\delta_0}{1+e'^2} \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{\partial e'_c}{\partial x} \right) \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2 + c} + \frac{z^2}{b^2 + c} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{因: } \frac{x^2 + y^2}{a^2 + c} + \frac{z^2}{b^2 + c} - 1 = 0, \text{故: } F_x = P_e x。$$

同理可得

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial V_e}{\partial y} = P_e y + (a^2 - b^2) \left(\frac{2\pi G\delta_0}{1+e'^2} \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{\partial e'_c}{\partial y} \right) \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2 + c} + \frac{z^2}{b^2 + c} - 1 \right) = P_e y \\ F_z &= \frac{\partial V_e}{\partial z} = Q_e z + (a^2 - b^2) \left(\frac{2\pi G\delta_0}{1+e'^2} \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{\partial e'_c}{\partial z} \right) \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2 + c} + \frac{z^2}{b^2 + c} - 1 \right) = P_e z \end{aligned}$$

于是,匀质旋转椭球体的外部引力为

$$\mathbf{F}_e = P_e x \mathbf{i} + P_e y \mathbf{j} + Q_e z \mathbf{k} \quad (3-10)$$

§3.3 参数椭球表面的重力公式

参见图 3-1, 设大、小两相似旋转椭球同心、同轴, 其表面方程分别为

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}, \quad \rho_n^2 = \frac{a_n^2 b_n^2}{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta} \quad (3-11)$$

$$a_n = na, b_n = nb, 0 < n < 1; \quad e_n'^2 = \frac{a_n^2 - b_n^2}{b_n^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2 \quad (3-12)$$

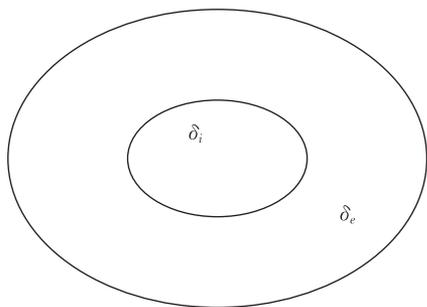


图 3-1 参数椭球

设 δ_i 为小椭球的匀质密度, δ_e 为大椭球面与小椭球面之间的匀质密度。因为重力以及引力可进行分量叠加,故参数椭球的表面重力可由三部分叠加而成;其值等于“大椭球(密度为 δ_e) 的重力”先减去“小椭球(密度为 δ_e) 的引力”再加上“小椭球(密度为 δ_i) 的引力”;其中,大椭球重力为“匀质椭球表面重力问题”由式(3-2)给出,小椭球引力为“匀质椭球外部引力问题”由式(3-10)

给出。设 (x, y, z) 为大椭球表面点的坐标,则参数椭球的表面重力为

$$\mathbf{g} = (P_1 - \omega^2 - P_2 + P_3)x\mathbf{i} + (P_1 - \omega^2 - P_2 + P_3)y\mathbf{j} + (Q_1 - Q_2 + Q_3)z\mathbf{k} \quad (3-13)$$

$$P_1 = 2\pi G\delta_e \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \quad (3-14)$$

$$Q_1 = 4\pi G\delta_e \frac{1 + e'^2}{e'^3} (e' - \arctan e') \quad (3-15)$$

$$P_2 = 2\pi G\delta_e \frac{1 + e_n'^2}{e_n'^3} \left[\arctan \frac{b_n e_n'}{\sqrt{b_n^2 + c}} - \frac{b_n e_n' \sqrt{b_n^2 + c}}{b_n^2 (e_n'^2 + 1) + c} \right] \quad (3-16)$$

$$Q_2 = 4\pi G\delta_e \frac{1 + e_n'^2}{e_n'^3} \left(\frac{b_n e_n'}{\sqrt{b_n^2 + c}} - \arctan \frac{b_n e_n'}{\sqrt{b_n^2 + c}} \right) \quad (3-17)$$

$$P_3 = 2\pi G\delta_i \frac{1 + e_n'^2}{e_n'^3} \left[\arctan \frac{b_n e_n'}{\sqrt{b_n^2 + c}} - \frac{b_n e_n' \sqrt{b_n^2 + c}}{b_n^2 (e_n'^2 + 1) + c} \right] \quad (3-18)$$

$$Q_3 = 4\pi G\delta_i \frac{1 + e_n'^2}{e_n'^3} \left(\frac{b_n e_n'}{\sqrt{b_n^2 + c}} - \arctan \frac{b_n e_n'}{\sqrt{b_n^2 + c}} \right) \quad (3-19)$$

因大椭球与小椭球为相似椭球,所以有 $e_n' = e'$ 。

因 $\rho > \rho_n$,故由式(3-6)可得

$$2c = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2 - \rho^2)^2 + 4a_n^2 b_n^2 \left(\frac{\rho^2}{\rho_n^2} - 1 \right)} - (a_n^2 + b_n^2 - \rho^2)$$

将式(3-11)代入得

$$2c = \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)$$

令

$$P = P_1 - P_2 + P_3, \quad Q = Q_1 - Q_2 + Q_3 \quad (3-20)$$

则

$$\mathbf{g} = (P - \omega^2)x\mathbf{i} + (P - \omega^2)y\mathbf{j} + Qz\mathbf{k} \quad (3-21)$$

若 T_n 为小椭球体积, T 为大椭球体积, M 为参数椭球的总质量, 则

$$T_n = n^3 T, \quad \delta_i n^3 T + \delta_e T(1 - n^3) = M, \quad \delta_i n^3 + \delta_e(1 - n^3) = \frac{M}{T} = \delta_0$$

$$\delta_i - \delta_e = \frac{3M - 4\delta_e \pi a^2 b}{4\pi a^2 b n^3} = \frac{\delta_0}{n^3} - \frac{\delta_e}{n^3} \quad (3-22)$$

将式(3-22)代入式(3-20)消去 δ_i 得

$$P = 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[\frac{3M - 4\delta_e \pi a^2 b}{4\pi a^2 b n^3} \left(\arctan \frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c}} - \frac{nbe' \sqrt{n^2 b^2 + c}}{n^2 b^2 (e'^2 + 1) + c} \right) + \delta_e \left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \right] \quad (3-23)$$

$$Q = 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[\frac{3M - 4\delta_e \pi a^2 b}{4\pi a^2 b n^3} \left(\frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c}} - \arctan \frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c}} \right) + \delta_e (e' - \arctan e') \right] \quad (3-24)$$

$$c = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2) \right] \quad (3-25)$$

以纬度表示参数椭球表面点向径为

$$\rho = \sqrt{\frac{a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (3-26)$$

于是, 将式(3-21)取模, 经坐标变换便可得到以外密度 δ_e 和界面深度比例系数 n 为变参数的参数椭球表面重力的封闭公式^[4]

$$g = |\mathbf{g}| = \sqrt{\frac{(P - \omega^2)^2 a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} = g(B, n, \delta_e) \quad (3-27)$$

式中, P 、 Q 、 c 和 ρ 分别由式(3-20)、式(3-25)和式(3-26)给出。注意, 因为式(3-26)中的 ρ 是纬度 B 的函数。所以, 与匀质椭球的常数 P 、 Q 不同, 参数椭球的 P 、 Q 是纬度 B 的函数。

将参数椭球的式(3-27)与水准椭球的索米里安公式(1-17)比较, 参数椭球的重力公式与水准椭球的重力公式的最大区别在于, 水准椭球重力仅仅是纬度的函数, 而参数椭球重力不仅是纬度的函数、而且是密度参数和界面深度参数的函数。因此, 采用参数椭球的重力公式(3-27)可以研究椭球的密度和界面深度与表面重力的数学关系。也就是说, 式(3-27)是一种研究椭球的密度和界面深度与表面重力的关系的数学工具。

§3.4 关于 c 和 e''

过匀质椭球(ab)外一点(x, y, z),只能做一个与(ab)共焦的椭球面(c),(c)在(ab)之外,(c)与(ab)共焦不相似,焦距 c 值由 $\frac{x^2 + y^2}{a^2 + c} + \frac{z^2}{b^2 + c} = 1$ 式确定。对于(ab)来说,外部有一族与(ab)共焦的椭球面,只是族中不同椭球面的焦距 c 不同。当然,过(ab)外一点(x, y, z)只能做一个共焦椭球面(c), x, y, z 值决定 c 。在共焦椭球面上, c 值处处相等、但引力值并不等,引力不仅与 c 相关、且与 x, y, z 相关。

要计算匀质椭球(ab)外一点(x, y, z)的引力,先解算出 c 值,然后计算出该外部点的引力。对于同一个匀质椭球(ab)来说,不同外部点的 c 值不同、引力不同。

对于参数椭球来说,要计算内椭球($a_n b_n$)对外椭球面(ab)上所有点的引力,外椭球面与内椭球相似不共焦,外椭球面上每一点的 c 值不同、引力也不同。(ab)上点 $x_0 y_0 z_0$ 的 c 值可由方程 $\frac{x_0^2 + y_0^2}{a_n^2 + c} + \frac{z_0^2}{b_n^2 + c} = 1$ 解出,而 $x_0 y_0 z_0$ 也满足 $\frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{b^2} = 1$,联立便得到求解(ab)上不同点 c 值的方程 $c = c(B)$

$$c = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(a_n^2 + b_n^2 - \frac{a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} \right)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - \left(a_n^2 + b_n^2 - \frac{a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} \right) \right] \quad (3-28)$$

为了使得参数椭球的 P 、 Q 表达式与匀质椭球的 P 、 Q 表达式采取相同的形式,可将式(3-23)和式(3-24)改写为

$$P = 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) \left(\arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''_c} \right) + \delta_e \left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \right] \quad (3-29)$$

$$Q = 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) (e''_c - \arctan e''_c) + \delta_e (e' - \arctan e') \right] \quad (3-30)$$

式中, $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ 为椭球(ab)的偏心率, $e''_c = \frac{b_n^2 e'^2}{b_n^2 + c}$ 为过(ab)上纬度为 B 的点、与椭球($a_n b_n$)共焦的椭球的偏心率。

第 4 章 重力聚点

CHAPTER 4 Gravity Assembly Point

Abstract: In Chapter 3, we suggested a normal gravity model of the Earth based on the parameter spheroid, i. e. the spheroid with density parameter and depth parameter. With the gravity formula of the parameter spheroid, in this Chapter we study the gravity properties of the parameter spheroid model. We find a series of special points, which locate at $35^{\circ}21'32''$ latitude on the surface of the parameter spheroid. We sum up some theorems for the parameter spheroid model, such as theorem of density distribution, theorem of matter flow and theorem of gravity assembly points. These theorems are helpful reference tool for studying macro-density-change of practical Earth.

第3章推导出密度参数和深度参数的旋转椭球表面重力的封闭公式,提出了一种“分层旋转椭球”——“参数椭球”的概念。在此基础上,本章深入研究了“参数椭球”的地球重力学性质;在纬度 $35^{\circ}21'32''$ 处,发现了“重力聚点”;给出了适用于地球的“密度分布定理”、“物质流动定理”和“重力聚点定理”;为研究地球密度的整体变化,提供了有用的理论工具^[5]。

§4.1 三种椭球表面的重力

由第3章可知,参数椭球表面重力公式为

$$g = \sqrt{\frac{(P - \omega^2)^2 a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} = g(B, n, \delta_e) \quad (4-1)$$

式中

$$P = 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[\frac{(\delta_0 - \delta_e)}{n^3} \left(\arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''_c} \right) + \delta_e \left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \right] \quad (4-2)$$

$$Q = 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[\frac{\delta_0 - \delta_e}{n^3} (e''_c - \arctan e''_c) + \delta_e (e' - \arctan e') \right] \quad (4-3)$$

$$c = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2) \right] \quad (4-4)$$

$$e''_c = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (4-5)$$

由第1章可知,匀质椭球表面重力公式为

$$g_0 = \sqrt{\frac{a^2 g_e^2 \cos^2 B + b^2 g_p^2 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (4-6)$$

式中

$$g_e = \frac{GM}{ab} \left[\frac{3}{2e'^2} \left(\frac{1 + e'^2}{e'} \arctan e' - 1 \right) - m \right] \quad (4-7)$$

$$g_p = \frac{GM}{a^2} \frac{3(1 + e'^2)}{e'^2} \left(1 - \frac{\arctan e'}{e'} \right), \quad m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (4-8)$$

水准椭球表面重力的索米里安公式为

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (4-9)$$

式中

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left\{ 1 + m \frac{6(e' - \arctane') - 2e'^3}{3[(3 + e'^2)\arctane' - 3e']} \right\} \quad (4-10)$$

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left\{ 1 + m \frac{6(1 + e'^2)(e' - \arctane') - 2e'^3}{3[(3 + e'^2)\arctane' - 3e']} \right\}, \quad m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (4-11)$$

式(4-1)、式(4-6)、式(4-9)是参数椭球、匀质椭球、水准椭球的重力公式。由参数椭球定义可知,当 $n = 1, 0$ 或 $\delta_e = \delta_0$ 时,参数椭球退化为匀质椭球。注意,“密度参数” δ_e 的量纲为(g cm^{-3}),“深度参数” n 为无量纲参数。

§4.2 密度分布定理与物质流动定理

将1980大地参考系统的(a, b, GM, ω)代入式(4-6)和式(4-9)可算得匀质椭球和水准椭球的重力扁率和参数椭球的平均密度分别为

$$\beta_g = \frac{g_p - g_e}{g_e} = 4.41 \times 10^{-3}, \quad \beta_\gamma = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = 5.30 \times 10^{-3} \quad (4-12)$$

$$\delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b} = 5.516968 \quad (4-13)$$

令 $B = 0^\circ, B = 90^\circ$,由式(4-1)可算得参数椭球的赤道重力、极点重力和重力扁率分别为

$$g_e^{\otimes} = (P_e - \omega)^2, \quad g_p^{\otimes} = Q_p b \quad (4-14)$$

$$\beta_g^{\otimes} = \frac{g_p^{\otimes} - g_e^{\otimes}}{g_e^{\otimes}} = \frac{Q_p b - (P_e - \omega)^2}{(P_e - \omega)^2} \quad (4-15)$$

式中

$$\begin{cases} P_e = 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} \left[(\delta_0 - \delta_e) \left(\arctane''_a - \frac{e''_a}{1 + e''_a} \right) + n^3 \delta_e \left(\arctane' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \right] \\ c_a = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2) \right] \\ e''_a = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c_a}} \end{cases} \quad (4-16)$$

$$\begin{cases} Q_p = 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} \left[(\delta_0 - \delta_e) (e''_b - \arctane''_b) + n^3 \delta_e (e' - \arctane') \right] \\ c_b = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2) \right] \\ e''_b = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c_b}} \end{cases} \quad (4-17)$$

将数值不同的深度参数 n 和密度参数 δ_e , 以及 1980 大地参考系统的 (a, b, GM, ω) 代入式(4-15), 便可算得参数椭球的重力扁率 β_g^{\otimes} 如图 4-1 所示。

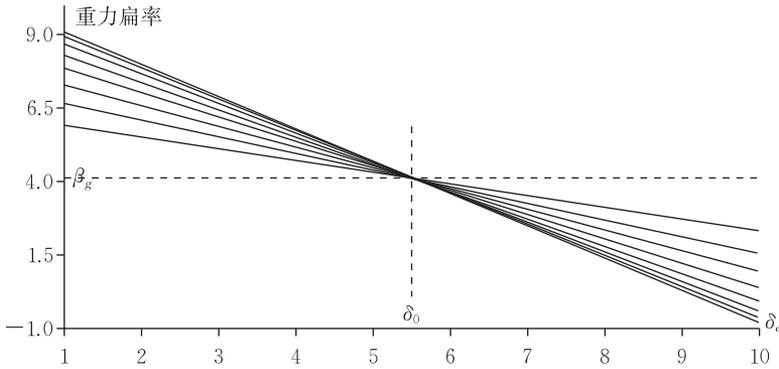


图 4-1 参数椭球的重力扁率

由图 4-1 可见, 当密度参数 δ_e 大于平均密度 δ_0 时, 参数椭球的重力扁率 β_g^{\otimes} 小于匀质椭球的重力扁率 β_g ; 当密度参数 δ_e 小于平均密度 δ_0 时, 参数椭球的重力扁率 β_g^{\otimes} 大于匀质椭球的重力扁率 β_g 。又因总质量 M 是不变的, 故当外密度 δ_e 大于平均密度 δ_0 时, 内密度 g_i 小于平均密度 δ_0 ; 当外密度 δ_e 小于平均密度 δ_0 时, 内密度 g_i 大于平均密度 δ_0 。由此我们得到参数椭球的“密度分布定理”。

密度分布定理: 当分层椭球的重力扁率大于匀质椭球的重力扁率时, 其内密度大于外密度; 当分层椭球的重力扁率小于匀质椭球的重力扁率时, 其内密度小于外密度。

为作图之便, 选取深度参数分别为 $n = 0.1, 0.2, \dots, 0.8$ (深度参数可取 $0 < n < 1$ 的任意值), 实算结果为 $n = 0.1$ 的重力扁率直线的斜率最大, 依次排列, $n = 0.8$ 的重力扁率直线的斜率最小。由图 4-1 可知, 参数椭球的重力扁率 β_g^{\otimes} 与密度参数 δ_e 成反比, 而反比的比率 (重力扁率直线的斜率) 又与深度参数 n 成反比。

由于参数椭球的密度参数 δ_e 是参数椭球的“外密度”, 又由于密度参数 δ_e 与重力扁率的反比关系; 所以, 当“外密度”增大时 (椭球的物质由内向外流动), 重力扁率减小; 反之, 当“外密度”减小时 (椭球的物质由外向内流动), 重力扁率增大。由此我们得到分层旋转椭球的“物质流动定理”。

物质流动定理: 当分层椭球的物质由内向外流动时, 其重力扁率减小; 当分层椭球的物质由外向内流动时, 其重力扁率增大。

由于参数椭球满足 1980 大地参考系统的 (a, b, GM, ω) , 又由于地球像参数椭球一样是“分层”的; 且水准椭球的重力扁率值被包含在图 4-1 中的参数椭球重力扁率的值域内; 故可认为以上“密度分布定理”和“物质流动定理”对地球也是适用的。

§4.3 重力聚点与重力聚点定理

匀质椭球的表面重力可由式(4-6)算得,水准椭球的表面重力可由式(4-9)算得;若选取数值不同的深度参数与密度参数 (n, δ_e) ,便可由式(4-1)算得参数椭球族的表面重力。

为了与图4-1中选取的参数相对应,选取深度参数与密度参数 (n, δ_e) 分别为 $(0.1, 1.0), (0.1, 2.0), \dots, (0.8, 8.0)$,代入式(4-1)进行计算。实算结果为 $(n, \delta_e) = (0.1, 1.0)$ 的参数椭球的重力扁率最大,依次排列, $(n, \delta_e) = (0.8, 8.0)$ 的参数椭球的重力扁率最小。

以上参数的参数椭球的表面重力与匀质椭球的表面重力 g_0 和水准椭球的表面重力 γ_0 的纬度分布如图4-2所示。

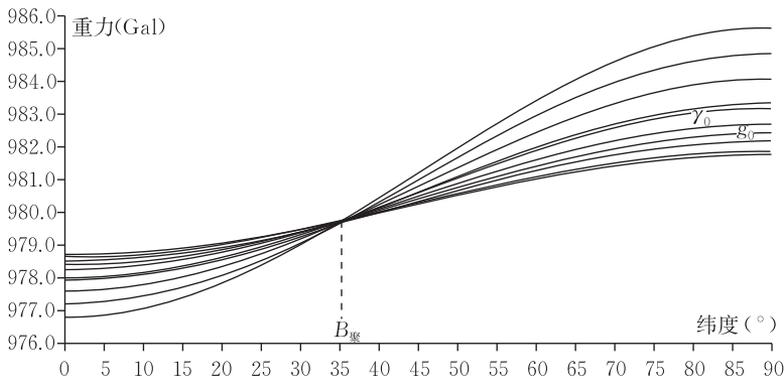


图4-2 椭球表面重力随纬度的变化

由图4-2可见,不同参数的参数椭球表面重力的曲线、匀质椭球表面重力 g_0 的曲线、水准椭球表面重力 γ_0 的曲线,在一个特殊的纬度值上“几乎相聚”(并非“完全相交”)于一点,故我们将这一点称为参数椭球(因为匀质椭球与不同参数的参数椭球均满足1980大地参考系统的 (a, b, GM, ω) ,所以匀质椭球是参数椭球的一个特例)与水准椭球的“重力聚点”。

不同参数的参数椭球(含匀质椭球)的表面重力与水准椭球的表面重力在“重力聚点”处相聚在一起,由此我们定义:匀质椭球(参数椭球的特例)表面重力曲线和水准椭球表面重力曲线的“交点”,就是参数椭球与水准椭球的“重力聚点”。

由式(4-6)和式(4-9)可算出重力聚点的纬度 $B_{\text{聚}}$ 。令: $g_0 = \gamma_0$,得

$$\sqrt{a^2 g_e^2 \cos^2 B_{\text{聚}} + b^2 g_p^2 \sin^2 B_{\text{聚}}} = a \gamma_e \cos^2 B_{\text{聚}} + b \gamma_p \sin^2 B_{\text{聚}} \quad (4-18)$$

将式(1-19)代入式(4-18)可得

$$B_{\text{聚}} = \pm 35^\circ 21' 32.544'' \quad (4-19)$$

将 $B_{\text{聚}}$ 代入式(4-6)或式(4-9),可算出重力聚点的理论重力值为

$$\gamma_{\text{聚}} = g_{\text{聚}} = 979.764\ 331 \text{ (Gal)} \quad (4-20)$$

在图 4-2 中选取的参数 (n, δ_e) 是有限的,但并不是特定的。实际上,重力聚点的存在,对于参数椭球不同参数的选取范围来说是相当“宽松”的。也就是说,在较大范围内,不同参数的参数椭球的在重力聚点的重力值,均与重力聚点的理论重力值相差不大(参见表 4-1)。

表 4-1 参数椭球重力聚点与重力聚点理论重力差值表 单位:mGal

$\delta_e \backslash n$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.0	-5.019	-4.757	-4.290	-3.679	-2.963	-2.168	-1.402	-0.705	-0.228
2.0	-4.109	-3.893	-3.510	-3.009	-2.423	-1.772	-1.145	-0.576	-0.185
3.0	-3.085	-2.921	-2.634	-2.257	-1.817	-1.329	-0.858	-0.431	-0.138
4.0	-1.946	-1.842	-1.661	-1.423	-1.145	-0.837	-0.540	-0.271	-0.086
5.0	-0.693	-0.656	-0.591	-0.506	-0.407	-0.298	-0.192	-0.096	-0.030
5.517	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.0	0.675	0.638	0.575	0.493	0.396	0.290	0.187	0.094	0.029
7.0	2.156	2.040	1.838	1.574	1.265	0.925	0.596	0.299	0.094
8.0	3.752	3.549	3.198	2.738	2.199	1.607	1.035	0.519	0.162
9.0	5.462	5.165	4.654	3.983	3.199	2.338	1.504	0.755	0.234

由图 4-2 和表 4-1 可见,密度参数 δ_e 和深度参数 n 的变化所引起的重力变化,在重力聚点两侧方向相反,但在重力聚点处影响不大;再参照“物质流动定理”,我们就得到了“重力聚点定理”。

重力聚点定理:水准椭球表面重力和匀质椭球表面重力的曲线的交点,称为重力聚点,当水准椭球的密度分布发生整体变化时,其重力效应在重力聚点处基本为零但在重力聚点两侧方向相反,并在极点和赤道分别取得两相反方向的最大值,当物质由内向外流动时,极点的重力减小而赤道的重力增大;当物质由外向内流动时,极点的重力增大而赤道的重力减小。

由于水准椭球与地球具有特殊关系,故可认为“重力聚点”与“重力聚点定理”,对地球也是适用的。

由式(4-19)可知,重力聚点在地球上并不只是一个点,而是南、北半球相对称的两个纬度圈,在这两个纬度圈上的点都是重力聚点。由重力聚点定理可知,极点和赤道是重力测量监测全球密度整体变化的理想场所,而这种监测在地球的重力聚点附近是不起作用的;所以,应该采用高精度的重力仪在地球的极点和赤道进行同时监测。

就像极点和赤道一样,重力聚点是地球上的特征点,重力聚点定理给出了重力聚点的地球重力学含义,而重力聚点的地质学含义则有待深入研究。例如,大陆地

震中的7级以上强震集中发生在北纬20°至50°之间的地带,横贯亚欧和北美大陆,而重力聚点“恰好”处在强地震带的正中间,这难道是巧合吗?

§4.4 参数椭球的物质扰动

由第3章中参数椭球的定义可知, δ_i 为参数椭球的“内密度”, δ_e 为“外密度”。若 T_n 为小椭球体积, T 为大椭球体积, M 为参数椭球的总质量, δ_0 为参数椭球的平均密度,则

$$T_n = n^3 T, \quad \delta_i n^3 T + \delta_e T(1 - n^3) = M \quad (4-21)$$

$$\delta_i n^3 + \delta_e(1 - n^3) = \frac{M}{T} = \delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b} \quad (4-22)$$

因为参数椭球的总质量 M 是不变的,所以参数椭球有两个参数, n 为内密度与外密度分界面的“深度参数”,参数椭球的外密度 δ_e 为“密度参数”,参数椭球的内密度 δ_i 为 n 和 δ_e 的函数,即

$$\delta_i = \frac{1}{n^3}(\delta_0 - \delta_e) + \delta_e = \delta_i(n, \delta_e) \quad (4-23)$$

对式(4-23)求导可得

$$d\delta_i = \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)d\delta_e \quad (4-24)$$

式(4-24)为参数椭球内密度与外密度的扰动关系式。设地球的平均半径为 $R_0 = 6371$ km,全球地壳底部的平均半径为 $R = 6338$ km,地核(外核)的平均半径为 $R_1 = 0.548 R = 3473$ km。

由参数椭球定义,可令

$$\frac{(a - na) + (b - nb)}{2} = (R_0 - R_1) \quad (4-25)$$

由式(4-25)可解得 $n = 0.544872358$,这就是参数椭球地核和地幔之间的界面深度参数,将 n 值代入式(4-26)可得

$$d\delta_i = -5.18d\delta_e \quad (4-26)$$

式(4-26)从参数椭球的理论上说明,地核与地幔在进行物质交换时,地核的物质扰动是地幔的物质扰动的5.18倍,地球应该是一个“外静内动”的椭球。

第 5 章 参数椭球的数学性质

CHAPTER 5 Mathematical Property of Parameter Spheroid

Abstract: This chapter probes into mathematical properties of the parameter spheroid. Its result shows that under the restricted condition of both point gravity potential equality for pole and equator, the boundary surface within the double layer spheroid limitlessly being tendency to the spheroid surface, the interior spheroid of the parameter spheroid tends to Maclaurin spheroid. This result proves mathematical exist of the parameter spheroid. Maclaurin spheroid is isopotential spheroid, that is to say that when parameter spheroid boundary surface depth parameter $n \rightarrow 1$, quasi level condition trends toward level condition, this explains the approximate relation between quasi level condition and level condition.

地球不是匀质椭球,但基本上是一个“多层椭球”。因此,在匀质椭球的基础上,研究多层椭球的引力问题,在地球重力学中具有重要意义。如果能把椭球各层的密度参数和界面深度参数作为变量引入椭球,就能够在椭球表面的重力与椭球内部的密度和界面深度之间建立起严格的函数关系,使之成为采用地球表面的重力测量数据来研究地球整体密度变化和界面深度变化的数学工具。第3章将“密度参数”和“界面深度参数”作为变量引入“双层椭球”,严格导出了双层椭球表面的重力公式,提出了“参数椭球”的概念。参数椭球是一种以密度参数和界面深度参数为自变量,以表面重力为因变量的“函数椭球”。第4章对“参数椭球”的地球物理性质进行了研究,在纬度 $35^{\circ}21'32''$ 处提出了“重力聚点”的概念,给出了参数椭球的密度分布定理、物质流动定理和重力聚点定理,提出了地核物质扰动的重力效应在两极和赤道处最大,在“重力聚点”处最小的观点。本章对参数椭球的数学性质进行初步研究,以探求参数椭球在数学上的存在性^[6]。

§5.1 参数椭球表面的引力位

参数椭球由内、外两个相似的旋转椭球构成。 a 、 b 分别为外椭球的长、短半轴, a_n 、 b_n 分别为内椭球的长、短半轴, δ_e 为外密度参数, δ_i 为内密度参数, δ_e 和 δ_i 为不随纬度变化的常密度参数, δ_0 为平均密度, n 为界面深度参数。

基本符号: $e^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}$ 为第一偏心率, $e'^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{b^2}$ 为第二偏心率,

M 为质量, ω 为角速度, $\delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b}$ 为平均密度, G 为万有引力常数, B 为地理纬度。

若 (x_0, y_0, z_0) 为参数椭球表面任意一点,则参数椭球表面点的引力位为

$$V = -\frac{1}{2}P(x_0^2 + y_0^2) - \frac{1}{2}Qz_0^2 + K \quad (5-1)$$

式中

$$P = P_1 - P_2 + P_3, \quad Q = Q_1 - Q_2 + Q_3, \quad K = K_1 - K_2 + K_3$$

$$P_1 = 2\pi G\delta_e \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right), \quad P_2 = 2\pi G\delta_e \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left(\arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''_c{}^2} \right)$$

$$P_3 = 2\pi G\delta_i \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left(\arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''_c{}^2} \right)$$

$$Q_1 = 4\pi G\delta_e \frac{1 + e'^2}{e'^3} (e' - \arctan e'), \quad Q_2 = 4\pi G\delta_e \frac{1 + e'^2}{e'^3} (e''_c - \arctan e''_c)$$

$$Q_3 = 4\pi G\delta_i \frac{1 + e'^2}{e'^3} (e''_c - \arctan e''_c)$$

$$K_1 = 2\pi G\delta_e \frac{a^2}{e'} \arctane', \quad K_2 = 2\pi G\delta_e \frac{a^2}{e'} \arctane'', \quad K_3 = 2\pi G\delta_i \frac{a^2}{e'} \arctane''_c$$

所以

$$P = 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) \left(\arctane''_c - \frac{e''_c}{1 + e''_c} \right) + \delta_e \left(\arctane' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \right] \quad (5-2)$$

$$Q = 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) (e''_c - \arctane''_c) + \delta_e (e' - \arctane') \right] \quad (5-3)$$

$$K = 2\pi G \frac{a^2}{e'} \left[(\delta_i - \delta_e) \arctane''_c + \delta_e \arctane' \right] \quad (5-4)$$

式中

$$e''_c = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2b^2 + c}}, \quad e''_a = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2b^2 + c_a}}, \quad e''_b = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2b^2 + c_b}} \quad (5-5)$$

$$c = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(n^2a^2 + n^2b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1 - n^2)} - (n^2a^2 + n^2b^2 - \rho^2) \right] \quad (5-6)$$

$$c_a = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(n^2a^2 + n^2b^2 - a^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1 - n^2)} - (n^2a^2 + n^2b^2 - a^2) \right] \quad (5-7)$$

$$c_b = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(n^2a^2 + n^2b^2 - b^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1 - n^2)} - (n^2a^2 + n^2b^2 - b^2) \right] \quad (5-8)$$

$$\rho = \left[\frac{(a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B)}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-9)$$

§5.2 极点与赤道的重力等位条件

在极点, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = b$ 。由于极点处的离心力位为零,所以由式(5-1)可知参数椭球的极点重力位 U_p 为

$$U_p = V_p = -\frac{1}{2}Q_p b^2 + K_p \quad (5-10)$$

在赤道, $x_0^2 + y_0^2 = a^2$, $z_0 = 0$ 。由于赤道处的离心力位为 $\omega^2 a^2/2$,所以参数椭球的赤道重力位 U_E 为

$$U_E = V_E + \frac{1}{2}\omega^2 a^2 = -\frac{1}{2}(P_E - \omega^2)a^2 + K_E \quad (5-11)$$

于是,参数椭球极点和赤道的重力等位条件为

$$-\frac{1}{2}(P_E - \omega^2)a^2 + K_E = -\frac{1}{2}Q_P b^2 + K_P \quad (5-12)$$

由式(5-2)、式(5-3)和式(5-4),可知式(5-12)中

$$P_E = 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) \left(\arctan e''_a - \frac{e''_a}{1 + e''^2_a} \right) + \delta_e \left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \right] \quad (5-13)$$

$$Q_P = 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) (e''_b - \arctan e''_b) + \delta_e (e' - \arctan e') \right] \quad (5-14)$$

$$K_E = 2\pi G \frac{a^2}{e'} \left[(\delta_i - \delta_e) \arctan e''_a + \delta_e \arctan e' \right] \quad (5-15)$$

$$K_P = 2\pi G \frac{a^2}{e'} \left[(\delta_i - \delta_e) \arctan e''_b + \delta_e \arctan e' \right] \quad (5-16)$$

将式(5-13)和式(5-14)中的符号进行简化得

$$E'' = \arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2}, \quad E''_a = \arctan e''_a - \frac{e''_a}{1 + e''^2_a} \quad (5-17)$$

$$E' = e' - \arctan e', \quad E'_b = e''_b - \arctan e''_b \quad (5-18)$$

分别代入式(5-13)和式(5-14)中,得

$$P_E = 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) E''_a + \delta_e E'' \right] \quad (5-19)$$

$$Q_P = 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) E'_b + \delta_e E' \right] \quad (5-20)$$

代入式(5-12)可得

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{e'} \left[(\delta_i - \delta_e) \arctan e''_a + \delta_e \arctan e' \right] - \frac{a^2}{2} \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) E''_a + \delta_e E'' \right] + \frac{\omega^2 a^2}{4\pi G} = \\ & \frac{a^2}{e'} \left[(\delta_i - \delta_e) \arctan e''_b + \delta_e \arctan e' \right] - b^2 \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) E'_b + \delta_e E' \right] \quad (5-21) \end{aligned}$$

将式(4-23)代入式(5-21)消去外密度参数 δ_e , 经整理后可得 $\delta_i'' = \delta_i''(n)$, 上标 u 表示内密度参数 δ_i 与界面深度参数 n 的函数关系, 满足极点和赤道的重力等位条件式(5-12), 即

$$\delta_i''(n) = \frac{\delta_0}{n^3} + \left(1 - \frac{1}{n^3} \right) \frac{\delta_0 \left[2(\arctan e''_a - \arctan e''_b) - \frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2} \right] + \frac{\omega^2 e' n^3}{2\pi G}}{2(\arctan e''_a - \arctan e''_b) - \frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2} + n^3 \left(\frac{E''}{e^2} - \frac{2E'}{e'^2} \right)} \quad (5-22)$$

§5.3 极点与赤道重力等位条件下的界面扩张

当 $n \rightarrow 1$ 时, 参数椭球内的界面趋向参数椭球表面, 我们称之为参数椭球的“界面扩张”。由式(4-23)可见, 如不附加任何约束条件, 当 $n = 1$ 时, 参数椭球的内密度参数 δ_i 退化成平均密度 δ_0 , 参数椭球退化成匀质椭球。若将式(4-23)与式(5-12)合并成式(5-22), 这就给参数椭球的“界面扩张”附加上了“极点和赤道的重力等位条件”。在“极点和赤道的重力等位条件”约束下, 当参数椭球内的界面无限趋向参数椭球表面时, 参数椭球的内密度参数可表示为 $\delta_i^u(n \rightarrow 1)$ 。

将式(5-22)中的符号进行简化, 令

$$A(n) = \frac{n^3 - 1}{2(\arctan e''_a - \arctan e''_b) - \frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2} + n^3 \left(\frac{E''}{e^2} - \frac{2E'}{e'^2} \right)} \quad (5-23)$$

则式(5-22)可改写为

$$\delta_i^u(n) = \frac{\delta_0}{n^3} + \frac{A(n)}{n^3} \left\{ \delta_0 \left[2(\arctan e''_a - \arctan e''_b) - \frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2} \right] + \frac{\omega^2 e' n^3}{2\pi G} \right\} \quad (5-24)$$

令: $n \rightarrow 1$, 则式(5-24)变为

$$\delta_i^u(n \rightarrow 1) = \delta_0 + \left\{ \delta_0 \left[2(\arctan e''_a - \arctan e''_b) - \frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2} \right] + \frac{\omega^2 e'}{2\pi G} \right\} A(n \rightarrow 1) \quad (5-25)$$

由式(5-5)、式(5-6)、式(5-7)、式(5-8)、式(5-17)和式(5-18)可知, 当 $n = 1$ 时

$$e''_a = e''_b = e', \quad c_a = c_b = 0, \quad E''_a = E'', \quad E'_b = E' \quad (5-26)$$

代入式(5-25)得

$$\delta_i^u(n \rightarrow 1) = \delta_0 + \left[\delta_0 \left(\frac{2E'}{e'^2} - \frac{E''}{e^2} \right) + \frac{\omega^2 e'}{2\pi G} \right] A(n \rightarrow 1) \quad (5-27)$$

考察式(5-23)可知: $A(n \rightarrow 1) = \frac{0}{0}$, 采用“洛必达法则”求极限

$$A(n \rightarrow 1) = 3n^2 \left[2 \left(\frac{\frac{de''_a}{dn}}{1 + e''_a} - \frac{\frac{de''_b}{dn}}{1 + e''_b} \right) - \frac{\frac{dE''_a}{dn}}{e^2} + \frac{2 \frac{dE'_b}{dn}}{e'^2} + 3n^2 \left(\frac{E''}{e^2} - \frac{2E'}{e'^2} \right) \right]^{-1} \quad (5-28)$$

由式(5-5)和式(5-7)可得

$$\frac{de''_a}{dn} = \frac{nb^2 e'^2}{2e''_a} \frac{2c_a - n \frac{dc_a}{dn}}{(n^2 b^2 + c_a)^2}, \quad \frac{dc_a}{dn} = \frac{1}{2} \left[\frac{dB_a}{dn} - 2n(a^2 + b^2) \right] \quad (5-29)$$

式中

$$B_a = \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)}$$

$$\left. \frac{dB_a}{dn} \right|_{n=1} = \frac{4n(a^2 + b^2)(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2) + 8na^2 b^2(1 - 2n^2)}{2\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2(1 - n^2)}} \Big|_{n=1} = 2b^2 - 2a^2$$

将上式代入式(5-29)得

$$\left. \frac{dc_a}{dn} \right|_{n=1} = -2a^2, \quad \left. \frac{de''_a}{dn} \right|_{n=1} = e'(1 + e'^2) \quad (5-30)$$

由式(5-5)和式(5-8)可得

$$\frac{de''_b}{dn} = \frac{nb^2 e'^2}{2e''_b} \frac{2c_b - n \frac{dc_b}{dn}}{(n^2 b^2 + c_b)^2}, \quad \frac{dc_b}{dn} = \frac{1}{2} \left[\frac{dB_b}{dn} - 2n(a^2 + b^2) \right] \quad (5-31)$$

式中

$$B_b = \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)}$$

$$\left. \frac{dB_b}{dn} \right|_{n=1} = \frac{4n(a^2 + b^2)(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2) + 8na^2 b^2(1 - 2n^2)}{2\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2(1 - n^2)}} \Big|_{n=1} = 2a^2 - 2b^2$$

将上式代入式(5-31)得

$$\left. \frac{dc_b}{dn} \right|_{n=1} = -2b^2, \quad \left. \frac{de''_b}{dn} \right|_{n=1} = e' \quad (5-32)$$

由式(5-17)和式(5-30)可得

$$\frac{dE''_a}{dn} = \left[\frac{1}{1 + e''^2_a} - \frac{1 - e''^2_a}{(1 + e''^2_a)^2} \right] \frac{de''_a}{dn}, \quad \left. \frac{dE''_a}{dn} \right|_{n=1} = \frac{2e'^3}{1 + e'^2} \quad (5-33)$$

由式(5-18)和式(5-32)可得

$$\frac{dE'_b}{dn} = \left(1 - \frac{1}{1 + e''^2_b} \right) \frac{de''_b}{dn}, \quad \left. \frac{dE'_b}{dn} \right|_{n=1} = \frac{e'^3}{1 + e'^2} \quad (5-34)$$

于是,将式(5-33)、式(5-34)代入式(5-28)并顾及式(5-26)得

$$A(n \rightarrow 1) = 3 \left[\frac{2e'^3}{1 + e'^2} - \frac{2e'^3}{e^2(1 + e'^2)} + \frac{2e'^3}{e'^2(1 + e'^2)} + 3 \left(\frac{E''}{e^2} - \frac{2E'}{e'^2} \right) \right]^{-1} \quad (5-35)$$

即

$$A(n \rightarrow 1) = 3 \left[\frac{2e'^3}{1 + e'^2} \left(1 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} \right) + 3 \left(\frac{E''}{e^2} - \frac{2E'}{e'^2} \right) \right]^{-1} \quad (5-36)$$

因为

$$1 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 0$$

所以

$$A(n \rightarrow 1) = \left(\frac{E''}{e^2} - \frac{2E'}{e'^2} \right)^{-1} \quad (5-37)$$

将式(5-37)代入式(5-27)得

$$\delta_i^n(n \rightarrow 1) = \delta_0 + \delta_0 \left(\frac{2E'}{e'^2} - \frac{E''}{e^2} \right) A(n \rightarrow 1) + \frac{\omega^2 e'}{2\pi G} A(n \rightarrow 1) = \frac{\omega^2 e'}{2\pi G} A(n \rightarrow 1) \quad (5-38)$$

因为

$$\frac{e'^2}{e^2} = \frac{a^2}{b^2} = 1 + e'^2$$

所以

$$A(n \rightarrow 1) = \frac{e'^2}{(1 + e'^2)E'' - 2E'} \quad (5-39)$$

将式(5-17)和式(5-18)代入式(5-39)得

$$A(n \rightarrow 1) = \frac{e'^2}{(3 + e'^2) \arctan e' - 3e'} \quad (5-40)$$

代入式(5-38)得

$$\delta_i^n(n \rightarrow 1) = \frac{\omega^2 e'^3}{2\pi G [(3 + e'^2) \arctan e' - 3e']} \quad (5-41)$$

§5.4 参数椭球与麦克劳林椭球的数学关系

由式(2-6)可知,麦克劳林椭球的质量 m_m 和密度 δ_m 为

$$\delta_m = \frac{3m_m}{4\pi a^2 b} = \frac{\omega^2 a e'^3}{2\pi G b [(3 + e'^2) \arctan e' - 3e']} \sqrt{1 + e'^2} \quad (5-42)$$

因为

$$\sqrt{1 + e'^2} = \frac{a}{b}$$

所以

$$\delta_m = \frac{\omega^2 e'^3}{2\pi G [(3 + e'^2) \arctan e' - 3e']} = \delta_i^n(n \rightarrow 1) \quad (5-43)$$

在参数椭球的极点和赤道重力位相等的约束条件下,当双层椭球内的界面无限趋向参数椭球表面时,参数椭球的内密度趋向麦克劳林椭球的密度。这个结果将参数椭球与麦克劳林椭球紧密地联系在一起,同时也证明了参数椭球表面重力公式的推导过程是完全正确的。

第 6 章 参数椭球的准等位条件

CHAPTER 6 Quasi Level Condition of Parameter Spheroid

Abstract: If we select the proper parameter, which conducting equipotential on parameter spheroid, the parameter spheroid becomes level spheroid. That means the mass of level spheroid is homogeneous layered distribution. The parameter spheroid can meet quasi level condition, but can not meet level condition. Homogeneous layered level spheroid does not exist. The density distribution of level spheroid is closely related to latitude.

参数椭球能不能成为等位椭球? 如果选择适当的参数,使得含有这种参数的参数椭球的表面成为重力等位面,那么这种参数椭球就是成了“水准椭球”;也就是说,这种“水准椭球”是匀质分层的。本章的研究表明,参数椭球能够满足“准等位条件”^[7],但不能满足等位条件;匀质分层的“水准椭球”是不存在的;水准椭球的密度分布与纬度密切相关^[8]。

§6.1 准等位条件一

参数椭球的 P 、 Q 值为纬度的函数, P_e 、 Q_p 分别为参数椭球赤道、极点的 P 、 Q 值。令参数椭球的重力扁率 β_g 等于水准椭球的重力扁率 β_γ , 则

$$\beta_g = \frac{g_p - g_e}{g_e} = \frac{Q_p b - (P_e - \omega^2)a}{(P_e - \omega^2)a} = \beta_\gamma = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}$$

即

$$\frac{Q_p b}{1 + \beta_\gamma} = (P_e - \omega^2)a \quad (6-1)$$

由式(5-2)至式(5-8)和式(5-13)、式(5-14)可知

$$\left\{ \begin{array}{l} P_e = 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} \left[(\delta_0 - \delta_e) \left(\arctan e''_a - \frac{e''_a}{1 + e''_a} \right) + n^3 \delta_e \left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \right] \\ e''_a = \frac{nbe'}{\sqrt{n_2 b_2 + c_a}}, \quad \frac{e''_a}{1 + e''_a} = \frac{nbe' \sqrt{n^2 b^2 + c_a}}{n^2 b^2 (e'^2 + 1) + c_a} \\ c_a = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2) \right] \\ Q_p = 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} \left[(\delta_0 - \delta_e) (e''_b - \arctan e''_b) + n^3 \delta_e (e' - \arctan e') \right] \\ e''_b = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c_b}} \\ c_b = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2) \right] \end{array} \right.$$

令

$$\left\{ \begin{array}{l} E' = e' - \arctan e', \quad E'' = \arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \\ E'_b = e''_b - \arctan e''_b, \quad E''_a = \arctan e'_a - \frac{e''_a}{1 + e''_a} \end{array} \right. \quad (6-2)$$

将 P_e 和 Q_p 代入式(6-1)可得

$$\frac{4\pi G b}{(1 + \beta_\gamma)} \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} \left[(\delta_0 - \delta_e) E''_b + n^3 \delta_e E' \right] = 2\pi G a \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} (\delta_0 - \delta_e) E''_a +$$

$$2\pi Ga \frac{1+e'^2}{e'^3 n^3} n^3 \delta_e E'' - \omega^2 a$$

整理得

$$\delta_e = \frac{\delta_0 E''_a - \frac{\omega^2 e' n^3}{2\pi G(1+e'^2)} - \frac{2b\delta_0}{a(1+\beta_\gamma)} E'_b}{\frac{2b}{a(1+\beta_\gamma)} (n^3 E' - E'_b) - (n^3 E'' - E''_a)} = \delta_e(n) \quad (6-3)$$

以上就是满足水准椭球极点与赤道两点重力条件的参数椭球的“密度参数函数”，我们把式(6-3)称为参数椭球的“准等位条件”。由式(6-3)可见，两点重力条件的约束使得参数椭球的密度参数 δ_e 和界面深度参数 n 构成了函数关系，从而使得参数椭球的双参数变成了单参数，有效地约束了参数椭球中的非唯一性问题。

§6.2 准等位条件二

以上求解了参数椭球满足两点重力条件的“密度参数函数”，下面再来求解满足两点重力位条件的“密度参数函数”。

由式(5-12)可知，参数椭球极点和赤道的重力等位条件为

$$2(K_e^{\otimes} - K_p^{\otimes}) = P_e^{\otimes} a^2 - Q_p^{\otimes} b^2 - \omega^2 a^2 \quad (6-4)$$

由式(5-13)、式(5-14)、式(5-15)和式(5-16)，将参数椭球极点和赤道的 P 、 Q 、 K 值代入式(6-4)得

$$4\pi G \frac{a^2}{e' n^3} (\delta_0 - \delta_e) (\arctan e''_a - \arctan e''_b) + \omega^2 a^2 = 2\pi G \frac{1+e'^2}{e'^3 n^3} a^2 [(\delta_0 - \delta_e) E''_a + n^3 \delta_e E''] - 4\pi G \frac{1+e'^2}{e'^3 n^3} b^2 [(\delta_0 - \delta_e) E'_b + n^3 \delta_e E']$$

消去因子 $\frac{2\pi G a^2}{e' n^3}$ 得

$$2(\delta_0 - \delta_e) (\arctan e''_a - \arctan e''_b) + \frac{\omega^2 e' n^3}{2\pi G} = \frac{1}{e^2} [(\delta_0 - \delta_e) E''_a + n^3 \delta_e E''] - \frac{2}{e'^2} [(\delta_0 - \delta_e) E'_b + n^3 \delta_e E'] \quad (6-5)$$

整理得

$$(\delta_0 - \delta_e) \left[2(\arctan e''_a - \arctan e''_b) - \frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2} \right] = n^3 \delta_e \left(\frac{E''}{e^2} - \frac{2E'_b}{e'^2} \right) - \frac{\omega^2 e' n^3}{2\pi G}$$

式中， $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ ； $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ 。

最后得满足两点重力位条件的“密度参数函数”为

$$\delta_e = \frac{\delta_0 \left[2(\arctan e''_a - \arctan e''_b) - \frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2} \right] + \frac{\omega^2 e' n^3}{2\pi G}}{2(\arctan e''_a - \arctan e''_b) - \frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2} + n^3 \left(\frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2} \right)} = \delta_e(n) \quad (6-6)$$

以上就是满足水准椭球极点与赤道两点重力位条件的参数椭球的“密度参数函数”，也是一种参数椭球的“准等位条件”。

§6.3 等位条件一

式(6-3)和式(6-6)这两个“准等位条件”的成立,使人很自然地产生出求解“全等位参数椭球”的想法,下面就来进行尝试。

已知参数椭球表面的单位法向矢量为

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}} \left(\frac{x}{a^2} \mathbf{i} + \frac{y}{a^2} \mathbf{j} + \frac{z}{b^2} \mathbf{k} \right)$$

参数椭球的表面重力为

$$\mathbf{g} = (P - \omega^2)x\mathbf{i} + (P - \omega^2)y\mathbf{j} + Qz\mathbf{k}$$

若令参数椭球表面的重力位处处相等,则必有 $\mathbf{g} \parallel \mathbf{n}$, 故参数椭球的等位条件为

$$\frac{x/a^2}{(P^\otimes - \omega^2)x} = \frac{y/a^2}{(P^\otimes - \omega^2)y} = \frac{z/b^2}{Q^\otimes z}$$

即

$$P^\otimes - \frac{Q^\otimes}{1 + e'^2} = \omega^2, \quad (1 + e'^2)P^\otimes = Q^\otimes + (1 + e'^2)\omega^2 \quad (6-7)$$

将式(3-23)和式(3-24)的 P 、 Q 代入式(6-7)可得

$$2\pi G \frac{(1 + e'^2)^2}{e'^3} \left[\frac{(\delta_0 - \delta_e)}{n^3} \left(\arctan e''_c \frac{e''_c}{1 + e''_c} \right) + \delta_e \left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \right] =$$

$$4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[\frac{(\delta_0 - \delta_e)}{n^3} (e''_c - \arctan e''_c) + \delta_e (e' - \arctan e') \right] + (1 + e'^2)\omega^2$$

引入简化符号式(6-2)得

$$(1 + e'^2) [(\delta_0 - \delta_e)e''_c + n^3 \delta_e E''] = 2 [(\delta_0 - \delta_e)E'_c + n^3 \delta_e E'] + \frac{\omega^2 e'^3 n^3}{2\pi G}$$

整理得

$$(\delta_0 - \delta_e) [(1 + e'^2)E''_c - 2E'_c] + \delta_e n^3 [(1 + e'^2)E'' - 2E'] = \frac{\omega^2 e'^3 n^3}{2\pi G}$$

即

$$\delta_e [(1 + e'^2)(n^3 E'' - E'_c) - 2(n^3 E' - E'_c)] + \delta_0 [(1 + e'^2)E'' - 2E'_c] = \frac{\omega^2 e'^3 n^3}{2\pi G}$$

最后得参数椭球重力等位条件下的密度参数方程为

$$\delta_e = \frac{\frac{\omega^2 e'^3 n^3}{2\pi G} - \delta_0 [(1 + e'^2)E'' - 2E'_c]}{(1 + e'^2)(n^3 E'' - E'_c) - 2(n^3 E' - E'_c)} = \delta_e(n, B) \quad (6-8)$$

式中

$$E' = e' - \arctan e'', \quad E'' = \arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2}$$

$$E'_c = e''_c - \arctan e''_c, \quad E''_c = \arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''_c{}^2}$$

$$c = \frac{1}{2} [\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)]$$

$$e''_c = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}$$

§6.4 等位条件二

下面再尝试另一种方法来求解“全等位参数椭球”。参数椭球表面重力位公式为

$$U_0^{\otimes} = K^{\otimes} - \frac{1}{2}(P^{\otimes} - \omega^2)(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}Q^{\otimes} z^2 \quad (6-9)$$

椭球表面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{b^2} = 1$$

式中

$$\cos \theta = \frac{b^2 \sin B}{\rho \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad \sin \theta = \frac{a^2 \cos B}{\rho \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}$$

$$x = \rho \sin \theta \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \theta \sin \lambda, \quad z = \rho \cos \theta$$

代入式(6-9)得

$$U_0^{\otimes} = K^{\otimes} - \frac{1}{2}(P^{\otimes} - \omega^2)a^2 + \frac{1}{2} \frac{[(P^{\otimes} - \omega^2)a^2 - Q^{\otimes} b^2]b^2 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} \quad (6-10)$$

水准椭球表面重力位公式为^[14]

$$U_0 = \frac{GM}{be'} \arctan e' + \frac{\omega^2 a^2}{3} \quad (6-11)$$

若令 $U_0^{\otimes} = U_0$, 则有

$$K^{\otimes} - \frac{1}{2}(P^{\otimes} - \omega^2)a^2 + \frac{1}{2} \frac{[(P^{\otimes} - \omega^2)a^2 - Q^{\otimes} b^2] b^2 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} = \frac{GM}{be'} \arctan e' + \frac{\omega^2 a^2}{3} \quad (6-12)$$

令

$$B_1 = \frac{b^2 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}, \quad B_2 = 1 - B_1 = \frac{a^2 \cos^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}$$

则式(6-12)可表达为

$$\begin{aligned} K^{\otimes} - \frac{1}{2}(P^{\otimes} - \omega^2)a^2 + \frac{1}{2}(P^{\otimes} - \omega^2)a^2 B_1 - \frac{1}{2}Q^{\otimes} b^2 B_1 &= U_0 \\ 2K^{\otimes} + (B_1 - 1)a^2 P^{\otimes} - B_1 b^2 Q^{\otimes} &= 2U_0 + (B_1 - 1)\omega^2 a^2 \end{aligned} \quad (6-13)$$

式中

$$\begin{aligned} P^{\otimes} &= 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} [(\delta_0 - \delta_e)E''_c + n^3 \delta_e E''] \\ Q^{\otimes} &= 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} [(\delta_0 - \delta_e)E'_c + n^3 \delta_e E'] \\ K^{\otimes} &= 2\pi G \frac{a^2}{e' n^3} [(\delta_0 - \delta_e) \arctan e''_c + n^3 \delta_e \arctan e'] \end{aligned}$$

将以上各式代入式(6-13)中,并消去因子 $\frac{2\pi G a^2}{e' n^3}$ 得

$$\begin{aligned} 2[(\delta_0 - \delta_e) \arctan e''_c + n^3 \delta_e \arctan e'] - \frac{B_2}{e} [(\delta_0 - \delta_e)E''_c + n^3 \delta_e E''] - \\ \frac{2B_1}{e'^2} [(\delta_0 - \delta_e)E'_c + n^3 \delta_e E'] &= \frac{e' n^3 (2U_0 - B_2 \omega^2 a^2)}{2\pi G a^2} \end{aligned} \quad (6-14)$$

整理得

$$\begin{aligned} (\delta_0 - \delta_e) \left(2 \arctan e''_c - \frac{B_2}{e^2} E''_c - \frac{B_1}{e'^2} E'_c \right) + \\ n^3 \delta_e \left(2 \arctan e' - \frac{B_2}{e^2} E''_c - \frac{B_1}{e'^2} E' \right) &= \frac{e' n^3 (2U_0 - B_2 \omega^2 a^2)}{2\pi G a^2} \end{aligned}$$

最后得参数椭球重力等位条件下的密度参数方程为

$$\delta_e = \frac{\frac{e' n^3 (2U_0 - B_2 \omega^2 a^2)}{2\pi G a^2} - \delta_0 \left(2 \arctan e''_c - \frac{B_2}{e^2} E''_c - \frac{2B_1}{e'^2} E'_c \right)}{n^3 \left(2 \arctan e' - \frac{B_2}{e^2} E''_c - \frac{2B_1}{e'^2} E' \right) - \left(2 \arctan e''_c - \frac{B_2}{e^2} E''_c - \frac{2B_1}{e'^2} E'_c \right)} = \delta_e(n, B) \quad (6-15)$$

式(6-8)和式(6-15)是参数椭球在重力等位条件一(椭球表面等位、但不一定

等于水准椭球表面的位)和重力等位条件二(椭球表面等位、且等于水准椭球表面的位)的矛盾中所取得的共识。由式(6-8)和式(6-15)可见,满足“等位条件”的参数椭球的外密度不再像满足“准等位条件”的式(6-3)和式(6-6)那样,仅仅只是深度参数 n 的函数、而且还与纬度 B 相关。因此,“分层匀质”的参数椭球不可能满足表面重力位处处相等的“等位条件”。由此可知:水准椭球的密度不可能按椭球状分层匀质分布,水准椭球的密度分布与纬度密切相关。

§6.5 准等位条件的极限内密度

由第5章可知,当“深度参数” n 无限趋向1时,满足“准等位条件二”的参数椭球的内密度趋向麦克劳林椭球的密度。也就是说,“准等位条件二”的“极限内密度”等于“麦克劳林密度”。下面我们来求解“准等位条件一”的“极限内密度”。

由式(6-3)和内、外密度的函数关系可知,“准等位条件一”的内密度的表达式为

$$\delta'_i = \frac{\delta_0}{n^3} - \left(\frac{1-n^3}{n^3} \right) \frac{\delta_0 E''_a - \frac{\omega^2 e'^3 n^3}{2\pi G(1+e'^2)} - \frac{2b\delta_0}{a(1+\beta_\gamma)} E'_b}{\frac{2b}{a(1+\beta_\gamma)} (n^3 E' - E'_b) - (n^3 E'' - E''_a)} \quad (6-16)$$

式(6-16)可改写为

$$\delta'_i = \frac{\delta_0}{n^3} + \frac{1}{n^3} \left[\delta_0 E''_a - \frac{\omega^2 e'^2 n^3}{2\pi G(1+e'^2)} - \frac{2b\delta_0 E'_b}{a(1+\beta_\gamma)} \right] A \quad (6-17)$$

$$A = A(n) = \frac{n^3 - 1}{\frac{2b}{a(1+\beta_\gamma)} (n^3 E' - E'_b) - (n^3 E'' - E''_a)} \quad (6-18)$$

考察式(6-18)和式(5-26)可知: $A(n \rightarrow 1) = \frac{0}{0}$,采用“洛必达法则”求极限

$$A(n \rightarrow 1) = \frac{3n^2}{\frac{2b}{a(1+\beta_\gamma)} \left(3n^2 E' - \frac{dE'_b}{dn} \right) - \left(3n^2 E'' - \frac{dE''_a}{dn} \right)} \quad (6-19)$$

将式(5-33)和式(5-34)代入式(6-19)得

$$A(n \rightarrow 1) = \left\{ \frac{2b}{a(1+\beta_\gamma)} \left[E' - \frac{e'^3}{3(1+e'^2)} \right] - \left[E'' - \frac{2e'^3}{3(1+e'^2)} \right] \right\}^{-1} \quad (6-20)$$

将上式(6-20)代入式(6-17)可得

$$\delta'_i(n \rightarrow 1) = \frac{\delta_0}{n^3} + \frac{1}{n^3} \left[\delta_0 E''_a - \frac{\omega^2 e'^2 n^3}{2\pi G(1+e'^2)} - \frac{2b\delta_0 E'_b}{a(1+\beta_\gamma)} \right] A(n \rightarrow 1) \quad (6-21)$$

将第 1 章第 3 节中的常数代入式(6-21)中,并顾及式(5-26)可算得式(6-21)的数值等于“麦克劳林密度” δ_m ,即

$$\delta'_i(n \rightarrow 1) = 7.100\,693 \text{ (g/cm}^3\text{)} = \delta_m = \frac{\omega^2 e'^3}{2\pi G[(3 + e'^2)\arctane' - 3e']} \quad (6-22)$$

由式(5-41)可知,“准等位条件二”的“极限内密度”为

$$\delta''_i(n \rightarrow 1) = \delta_m = \frac{\omega^2 e'^3}{2\pi G[(3 + e'^2)\arctane' - 3e']} = 7.100\,693 \text{ (g/cm}^3\text{)} \quad (6-23)$$

由式(6-22)和式(6-23)可得

$$\delta'_i(n \rightarrow 1) = \delta''_i(n \rightarrow 1) = \delta_m = 7.100\,693 \text{ (g/cm}^3\text{)} \quad (6-24)$$

由式(6-24)可见,在“极限内密度”的形式下,“准等位条件一”和“准等位条件二”是完全等价的。

§6.6 准等位条件的密度分布

由式(6-8)和式(6-15)可知,“分层匀质”的参数椭球不可能满足表面重力位处处相等的“等位条件”。因此,水准椭球不可能是“匀质分层”的椭球,水准椭球的密度分布与纬度密切相关。

但是,由式(6-3)和式(6-6)可知,虽然“匀质分层”的参数椭球不满足等位条件,但却能够满足“准等位条件”。由于水准椭球表面重力沿纬度的分布基本是线形的,所以可认为“准等位条件”是近似的等位条件。那么,满足“准等位条件”的“匀质分层椭球”有没有可能接近地球实际密度分布呢?

取“深度参数” n 从 0.4 到 0.9,由“准等位条件一”和“准等位条件二”的内密度函数式(6-16)和式(5-22),可计算出参数椭球“准等位条件”的内密度分布曲线如图 6-1 所示。

由图 6-1 可见,“准等位条件一”的内密度函数和“准等位条件二”的内密度函数并不是等价的,而当“深度参数”趋向 1 时,二者同时趋向“麦克劳林密度”。这说明只有在“极限内密度”的形式下,“准等位条件一”和“准等位条件二”才是等价的。

如果把地球近似地分为地核和地幔(地壳并入地幔)两层,那么由本书第 8 章中可知:地幔的平均密度约为 $\delta_c = 4.658 \text{ g/cm}^3$,核幔边界的深度参数约为 $n = 0.544\,872$,而地核的平均密度则约为 $\delta_i = 9.968 \text{ g/cm}^3$ 。但是,从图 6-1 中不难看出,参数椭球准等位条件的内密度函数并不符合这种分布。

取 $n = 0.544\,872$,由式(6-16)、式(5-22)可算出 $\delta'_i = 13.287 \text{ g/cm}^3$ 、 $\delta''_i = 34.377 \text{ g/cm}^3$,这与 $\delta_i = 9.968 \text{ g/cm}^3$ 的地核实际平均密度相距甚远。这就是

说,即使是满足“准等位条件”的“匀质分层椭球”,也不可能接近地球实际的密度分布。因此,“匀质分层椭球”不可能是地球的密度分布,地球的密度分布必定与纬度密切相关。

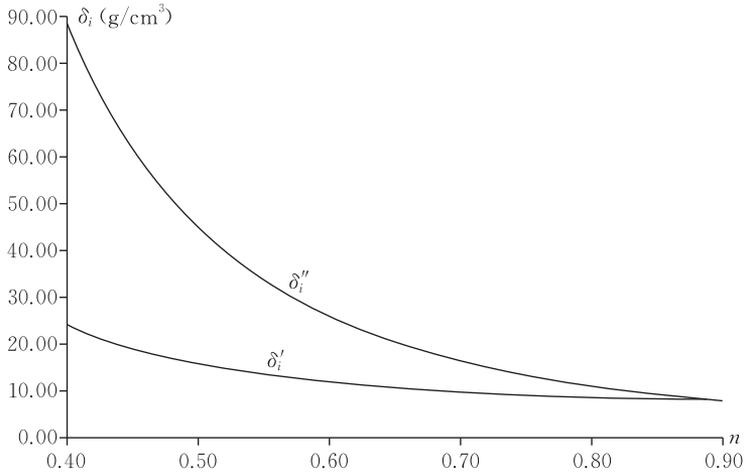


图 6-1 “准等位条件”的内密度分布曲线

第 7 章 地球纬向正常密度函数

CHAPTER 7 Latitudinal Normal Density Function of the Earth

Abstract: The earliest gravity theory for the earth density is equilibrium configuration theory published by French A. C. Clairaut in 1743. According to the theory, A. M. Legendre (1793) and P. S. Laplace (1785) obtained density law inner the earth. Hereafter, G. H. Darwin (1884), E. Wiechert (1897), E. C. Bullard (1954), F. Birch (1964), K. E. Bullen (1975) obtained similar density law separately. But these density law just show density distribution along radial direction $\rho = \rho(r)$, rather latitude density distribution $\delta = \delta(B)$. We propose the latitudinal density concept in this chapter. On the restriction of quasi level condition, the latitudinal normal density function is solved.

研究地球的形状和密度,是地球重力学的两项基本任务。在地球重力学中,关于地球形状的理论与方法已得到充分发展,而关于地球密度的理论与方法则显得比较薄弱。传统的斯托克斯理论与莫洛坚斯基(M. S. Molodensky)理论都是以回避地球密度分布为数学前提来研究地球形状的^[81~82],地球形状学几乎成了地球重力学的同义词^[9~10]。伴随空间大地测量技术的迅速发展和地球形状学理论不断完善,地球形状不应该再是地球重力学永远不变的理论主题,而关于地球整体密度分布方式的大陆漂移、地幔物质流动、海底扩张等新问题的出现,也要求地球重力学的研究重点从地球形状转移到地球密度上来^[11~12]。

最早用于研究地球密度的地球重力学理论,是法国的克莱劳(A. C. Clairaut)于1743年发表的平衡形状理论^[53]。勒让德(A. M. Legendre)于1793和拉普拉斯于1825根据这个理论得到了地球内部的密度定律。此后,达尔文(G. H. Darwin)于1884、维歇特(E. Wiechert)于1897、布拉德(E. C. Bullard)于1954、伯奇(F. Birch)于1964、布伦(K. E. Bullen)于1975,也分别得到了类似的密度定律^[54~57]。但是,以上密度定律得到的都是地球径向密度分布 $\rho = \rho(r)$ ^[13],而没有得到纬向密度分布 $\delta = \delta(B)$ 。

§7.1 由几何扁率到密度扁率的联想

1687年,牛顿首先提出地球是一个椭球的观点,从数学上证明了地球是一个赤道半径大于极点半径的扁椭球,并计算出地球的几何扁率 $f = (a - b)/a = 1/239$ 。然而1716年卡西尼(Cassini)父子根据毕加(J. Picard)和他们自己不太精确的弧度测量结果却断定地球是一个极点半径大于赤道半径的长椭球。这就发生了科学史上著名的“地长说”与“地扁说”之争。为了解决这个争端,巴黎科学院于1735年派遣两支测量队,一队去北极圈附近的拉普兰(Lapland),另一队去赤道附近的基多(Kito),进行精密的弧度测量。结果证明,子午线的每度弧长在赤道附近最小、巴黎附近居中、北极附近最大;完全证明了地扁说的正确性。牛顿的地扁说是正确的,但他计算出的扁率值 $1/239$ 却不那么精确。在牛顿后不几年,惠更斯(C. Huygens)单独给出了另一扁率值 $1/577$,人们试图从理论上和观测上解释其差异,但没有结果。此后,1789年勒让德的 $1/318$,1841年贝塞尔(F. W. Bessel)的 $1/299$,1866年克拉克(A. R. Clarke)的 $1/295$,1909年海福德(J. F. Hayford)的 $1/297$,1948年布拉德的 $1/297.34$;地球的几何扁率现已精确地得到了确认。

由于地球密度与纬度的对应关系在前人的研究中一直没有得到确定,为了寻找一个新的出发点,我们由以上地球几何扁率的研究历史,联想到地球是否也存在着“密度扁率”^[14]。

§7.2 纬向密度概念

研究地球的纬向密度分布对认识地球物质的纬向迁移有重要意义,对于探讨大陆漂移、地幔对流、海底扩张等问题的地球重力学成因来说,地球物质的纬向分布和纬向迁移比起地球物质的径向分布和径向迁移具有更直接的联系。

设椭球内有一个扁率相同的相似椭球族由椭球表面连续向地心收缩,而椭球表面任一点的向径则穿过这个相似椭球族的所有相似椭球面到达地心。由于该向径上所有点在各相似椭球面上的纬度是相同的,因此,我们定义:该向径上所有点的密度的平均值为椭球在该点的“纬向密度”^[15]。由上述定义可见,纬向密度概念把椭球体内的密度抽象到(而不是压缩到)椭球表面上,在椭球体内密度与椭球表面纬度之间建立起对应的关系,使得我们用简明的数学方法定量地研究地球密度的纬向分布成为可能。

有了纬向密度概念,就有了密度扁率概念。若 δ_E 和 δ_P 分别为赤道和极点的纬向密度,则密度扁率为 $f' = (\delta_P - \delta_E) / \delta_P$ 。

皮泽蒂于1894年给出了旋转椭球质面的“纬向密度分布函数”,但椭球体密度与纬度的对应关系在前人的研究中没有得到确定。纬向密度概念把椭球体内的密度抽象到(而不是压缩到)椭球表面上,在椭球体内密度与椭球表面纬度之间建立起对应的关系,使得我们用简明的数学方法定量地研究地球密度的纬向分布成为可能。本章推导出极点重力与赤道重力的纬向密度积分公式。按照水准椭球的极点重力条件和赤道重力条件,求解出水准椭球的“纬向密度分布函数”。

为了研究地球的纬向密度,应该首先研究水准椭球的纬向密度。莫里茨(H. Moritz)认为:水准椭球内任何合理的物质分布是不知道的,但水准椭球的非均匀、非平衡的物质分布是一定存在的^[16]。艾奥纳(Iona)于1978的研究表明,匀质椭球不可能像水准椭球那样,在极点和赤道产生那么大的重力差^[17]。玛艾雷(Maialle)和伊波利托(Hipolito)于1996用分层匀质的椭球来计算极点和赤道的重力,并与水准椭球进行比较,取得了较好的结果^[18]。第6章的研究表明,水准椭球的非匀质密度是按纬度分布的。

由第2章可知,皮泽蒂将水准椭球分解为“内体”和“表层”两部分。内体是麦克劳林椭球,表层为紧紧包裹在麦克劳林椭球外的单层质面,其面密度为

$$\mu(B) = \frac{(M - m_m) \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}{4\pi a^2 b} \quad (7-1)$$

在极点和赤道

$$\mu_P = \mu(90^\circ) = \frac{M - m_m}{4\pi a^2}, \quad \mu_E = \mu(0^\circ) = \frac{M - m_m}{4\pi ab} \quad (7-2)$$

由式(2-8)可知,因 $m_m > M$,故 $\mu(B) < 0$ 。将式(7-2)代入式(7-1)得

$$\mu(B) = -\sqrt{\mu_E^2 \cos^2 B + \mu_p^2 \sin^2 B} \quad (7-3)$$

由于皮泽蒂椭球的表层为负密度,这在物理上是不现实的。用莫里茨的话来说,这种密度分布对地球肯定是“不合理的”。因此,设想用本书定义“纬向密度”来构造水准椭球。

因麦克劳林椭球为匀质椭球,故纬向密度的函数形式应与皮泽蒂椭球的内体无关,而只与其表层相关。故可设水准椭球的纬向密度函数的形式继承式(7-3)的函数形式,即

$$\delta(B) = \sqrt{\delta_E^2 \cos^2 B + \delta_p^2 \sin^2 B} \quad (7-4)$$

以上即水准椭球的纬向密度的函数形式,其中赤道纬向密度 δ_E 和极点纬向密度 δ_p 是两个待定常数。与式(7-3)不同的是, $\mu(B)$ 是面密度,而 $\delta(B)$ 则是体密度,是椭球某一向径上所有点的密度的平均值,是一种等效密度。另外,皮泽蒂椭球的表面是等位的,但式(7-4)却不一定能保证这一点。为此,我们在下面将以水准椭球极点和赤道的重力作为约束条件来解算式(7-4)中的待定常数 δ_E 和 δ_p [19],从而使得纬向密度函数逼近水准椭球的等位性质。

§7.3 极点重力纬向密度积分公式

推导“极点重力纬向密度积分公式”时,采用“极原点坐标系”(见图7-1), r 为以南极点为坐标原点的向径、 ψ 为极距、 λ 为经度,地球椭球面方程 r_0 的表达式为

$$\frac{r_0^2 \sin^2 \psi}{a^2} + \frac{(r_0 \cos \psi - b)^2}{b^2} = 1, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad r_0 = \frac{2b(1 + e'^2) \cos \psi}{1 + e'^2 \cos^2 \psi} \quad (7-5)$$

采用水准椭球的极点重力为约束条件,极点重力纬向密度积分公式为

$$\gamma_p = G \int_{\tau} \delta \frac{r \cos \psi}{r^3} d\tau = G \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^{r_0} \delta dr \quad (7-6)$$

式中, $d\tau = r^2 \sin \psi d\lambda d\psi dr$ 。

为求积分之便,将由纬度表达的纬向正常密度函数 $\delta = \delta(B)$ 转换成由地心纬度余角 θ 来表达,则式(7-4)可近似为

$$\delta = \delta(\theta) = \delta_E \sin^2 \theta + \delta_p \cos^2 \theta \quad (7-7)$$

若令 $\kappa = \delta_p / \delta_E$, 则式(7-7)变为

$$\delta(\theta) = \delta_E (\sin^2 \theta + \kappa \cos^2 \theta) \quad (7-8)$$

见图7-1,在第一象限中,由正弦定理可得

$$\frac{r}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{b}{\sin(\theta - \psi)} \quad (7-9)$$

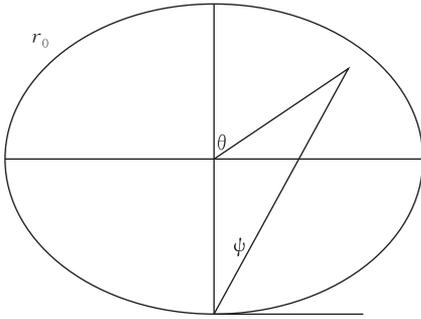


图 7-1 极原点坐标系

$$\sin(\theta - \psi) = \sin\theta\cos\psi - \cos\theta\sin\psi,$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta}$$

由以上三角函数关系,式(7-9)可变为

$$\cos^2\theta = \frac{(r\cos\psi - b)^2}{r^2 + b^2 - 2rb\cos\psi},$$

$$\sin^2\theta = \frac{(r\sin\psi)^2}{r^2 + b^2 - 2rb\cos\psi} \quad (7-10)$$

将式(7-10)代入式(7-8)可得

$$\delta = \delta_E \frac{(\sin^2\psi + \kappa\cos^2\psi)r^2 - (2b\kappa\cos\psi)r + b^2\kappa}{r^2 - (2b\cos\psi)r + b^2} = \delta_E\delta_1(\psi, r) \quad (7-11)$$

虽然 θ 的定义在图 7-1 椭圆中的第一象限为顺时针向、第四象限为逆时针向,但是不难证明,式(7-11)同时适用于这两个象限,这就使得以下积分无需分南、北半椭圆进行。将式(7-11)代入式(7-6)可得

$$\gamma_p = 2\pi G\delta_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\sin\psi d\psi \int_0^{r_0} \delta_1(\psi, r) dr \quad (7-12)$$

求不定积分

$$\begin{aligned} \delta_{\text{极}}(\psi, r) &= \int \delta_1(\psi, r) dr = (\sin^2\psi + \kappa\cos^2\psi)r + b\sin^2\psi(1 - \kappa) \cdot \\ &\quad \left[\cos\psi \ln(r^2 - 2b\cos\psi r + b^2) + \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} \arctan \frac{r - b\cos\psi}{b\sin\psi} \right] \end{aligned} \quad (7-13)$$

应用式(7-13),则式(7-12)变为

$$\gamma_p = 2\pi G\delta_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\sin\psi [\delta_{\text{极}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{极}}(\psi, 0)] d\psi \quad (7-14)$$

以上就是地球极点重力纬向密度积分公式,式中 r_0 由式(7-5)给出。

§7.4 赤道重力纬向密度积分公式

推导“赤道重力纬向密度积分公式”时,采用“赤道原点坐标系”(见图 7-2), r 为以赤道点为坐标原点的向径、 ψ 为极距、 λ 为广义经度,地球椭球面方程 r'_0 的表达式为

$$\begin{aligned} \frac{r_0'^2 \sin^2\psi \cos^2\lambda + (r_0' \cos\psi - a)^2}{a^2} + \frac{r_0'^2 \sin^2\psi \sin^2\lambda}{b^2} &= 1 \\ r_0' &= \frac{2a\cos\psi}{1 + e'^2 \sin^2\psi \sin^2\lambda} \end{aligned} \quad (7-15)$$

采用水准椭球的赤道重力 γ_e 为约束条件,赤道重力纬向密度积分公式为

$$\gamma_e + a\omega^2 = G \int_{\tau} \delta \frac{r \cos \psi}{r^3} d\tau = G \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{r'_0} dr \quad (7-16)$$

式中, $d\tau = r^2 \sin \psi d\lambda d\psi dr$ 。

由式(7-15)可见, r'_0 随 λ 的变化仅产生微小变化, 故取 λ 为其变化值的中数 $\bar{\lambda}$, 则

$$r'_0 = \frac{2a \cos \psi}{1 + e'^2 \sin^2 \bar{\lambda} \sin^2 \psi} \quad (7-17)$$

为了确定 $\bar{\lambda}$, 令 $\delta = \delta_0$, 则由式(7-16)可得

$$g_e + a\omega^2 = 2\pi G \delta_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin \psi \frac{2a \cos \psi}{1 + e'^2 \sin^2 \bar{\lambda} \sin^2 \psi} d\psi \quad (7-18)$$

在式(7-18)中, δ_0 为匀质椭球密度, g_e 为匀质椭球赤道重力, 均为已知常数。故由式(7-18)用数值积分可算出 $\sin^2 \bar{\lambda} = 0.49952$ 、 $\bar{\lambda} = 44.972498^\circ$, 则式(7-17)变为

$$r'_0 = \frac{2a \cos \psi}{1 + 0.49952 e'^2 \sin^2 \psi} \quad (7-19)$$

由于式(7-19)中已不含 λ , 故式(7-16)可改写为

$$\gamma_e + a\omega^2 = 2\pi G \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^{r'_0} \delta dr \quad (7-20)$$

在图 7-2 中, φ 为地心纬度, 故式(7-8)可改写为

$$\delta = \delta(\varphi) = \delta_E (\cos^2 \varphi + \kappa \sin^2 \varphi) \quad (7-21)$$

见图 7-2, 在第二象限中, 由正弦定理可得

$$r / \sin(\pi - \varphi) = a / \sin(\varphi - \psi) \quad (7-22)$$

对照式(7-10)可得

$$\cos^2 \varphi = \frac{(r \cos \psi - a)^2}{r^2 + a^2 - 2r a \cos \psi}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{(r \sin \psi)^2}{r^2 + a^2 - 2r a \cos \psi} \quad (7-23)$$

将式(7-23)代入式(7-21)可得

$$\delta = \delta_E \frac{(\kappa \sin^2 \psi + \cos^2 \psi) r^2 - (2a \cos \psi) r + a^2}{r^2 - (2a \cos \psi) r + a^2} = \delta_E \delta_2(\psi, r) \quad (7-24)$$

虽然 φ 的定义在图 7-2 椭圆中的第二象限为顺时针向、第一象限为逆时针向, 但是不难证明, 式(7-24)同时适用于这两个象限, 这就使得以下积分无需分东、西半球进行。将式(7-24)代入式(7-20)可得

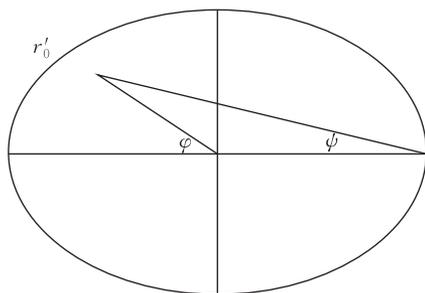


图 7-2 赤道原点坐标系

$$\gamma_e + a\omega^2 = 2\pi G\delta_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_0^{r'} \delta_2(\psi, r) dr \quad (7-25)$$

参照式(7-13)可得

$$\delta_{\text{赤}}(\psi, r) = \int \delta_2(\psi, r) dr = (\kappa \sin^2\psi + \cos^2\psi)r + a \sin^2\psi(\kappa - 1) \cdot \left[\cos\psi \ln(r^2 - 2a \cos\psi + a^2) + \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} \arctan \frac{r - a \cos\psi}{a \sin\psi} \right] \quad (7-26)$$

应用式(7-26),则式(7-25)变为

$$\gamma_e + a\omega^2 = 2\pi G\delta_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{赤}}(\psi, r'_0) - \delta_{\text{赤}}(\psi, 0)] d\psi \quad (7-27)$$

以上就是地球赤道重力纬向密度积分公式,式中 r'_0 由式(7-27)给出。

§7.5 待定常数的求解与地球的密度扁率

“极点重力纬向密度积分公式”和“赤道重力纬向密度积分公式”中有 δ_E 和 κ 两个未知数,由式(7-14)和式(7-27)消去 δ_E 可得

$$\frac{\gamma_p}{\gamma_e + a\omega^2} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{极}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{极}}(\psi, 0)] d\psi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{赤}}(\psi, r'_0) - \delta_{\text{赤}}(\psi, 0)] d\psi} \quad (7-28)$$

在式(7-28)中只有一个未知数 κ 。常数 $\gamma_p = 983.218\ 637\ \text{cm/s}^2$ 、 $\gamma_e = 978.032\ 726\ \text{cm/s}^2$ 、 $a = 637\ 813\ 700\ \text{cm}$ 、 $b = 635\ 675\ 200\ \text{cm}$ 、 $\omega = 7\ 292\ 115 \times 10^{-11}$ (rad/s)、 $G = 6.67 \times 10^{-8}\ \text{cm}^3/(\text{gs}^2)$ 、 $GM = 3\ 986\ 005 \times 10^{14}\ \text{cm}^3/\text{s}^2$ 。用数值积分解算式(7-28)可得 $\kappa = 1.007\ 935\ 35$,将 κ 代入式(7-14)可得 $\delta_E = 5.496\ 247$ 、 $\delta_p = \kappa\delta_E = 5.539\ 862\ \text{g/cm}^3$ 。于是,由式(7-21)或式(7-4),最终得到的“地球纬向正常密度函数”为

$$\delta(\varphi) = 5.496\ 247 \cos^2\varphi + 5.539\ 862 \sin^2\varphi \quad (7-29)$$

$$\delta(B) = \sqrt{5.496\ 247^2 \cos^2 B + 5.539\ 862^2 \sin^2 B} \quad (7-30)$$

式中, φ 为椭球地心纬度; B 为椭球地理纬度。数值验算表明,以上两式差别不大。

由上式可算出水准椭球的密度扁率为

$$f' = (\delta_p - \delta_E)/\delta_p = 1/127 \quad (7-31)$$

按照地球重力学中几何量与物理量密切相关的传统,对应地球几何扁率的“地长说”与“地扁说”之争,地球的密度扁率也应存在着“地长说”($\delta_E < \delta_p$)与“地扁说”($\delta_E > \delta_p$)的区别。式(7-31)从数学上说明了地球的赤道纬向密度是小

于极点纬向密度的,即 $\delta_E < \delta_p$ 。

§7.6 椭球质量检核

采用计算椭球质量的方法来检验以上数值积分计算的“地球纬向正常密度函数”中的常数 $\kappa = 1.007\ 935\ 35$ 、 $\delta_E = 5.496\ 247\ \text{g/cm}^3$ 的正确性。

7.6.1 极点坐标系

$$\text{密度函数: } \delta(\psi, r) = \delta_E \frac{(\sin^2 \psi + \kappa \cos^2 \psi) r^2 - (2b\kappa \cos \psi) r + b^2 \kappa}{r^2 - (2b \cos \psi) r + b^2}$$

$$\text{椭球方程: } r_0 = \frac{2b(1 + e'^2) \cos \psi}{1 + e'^2 \cos^2 \psi}$$

$$M_1 = \int_{\tau} \delta d\tau = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi \int_0^{r_0} r^2 \delta dr$$

式中, $d\tau = r^2 \sin \psi d\lambda d\psi dr$ 。

$$M_1 = 2\pi \delta_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi \int_0^{r_0} \frac{(\sin^2 \psi + \kappa \cos^2 \psi) r^4 - (2b\kappa \cos \psi) r^3 + b^2 \kappa r^2}{r^2 - (2b \cos \psi) r + b^2} dr$$

$$f(\psi, r) = \int \frac{(\sin^2 \psi + \kappa \cos^2 \psi) r^4 - (2b\kappa \cos \psi) r^3 + (b^2 \kappa) r^2}{r^2 - (2b \cos \psi) r + b^2} dr$$

$$r^{[0]} = \int \frac{1}{r^2 - 2b \cos \psi r + b^2} dr = \frac{1}{b \sin \psi} \arctan \frac{r - b \cos \psi}{b \sin \psi}$$

$$r^{[1]} = \int \frac{r}{r^2 - 2b \cos \psi r + b^2} dr = \frac{1}{2} \ln(r^2 - 2b \cos \psi r + b^2) + (b \cos \psi) r^{[0]}$$

$$r^{[2]} = \int \frac{r^2}{r^2 - 2b \cos \psi r + b^2} dr = r + b \cos \psi \ln(r^2 - 2b \cos \psi r + b^2) + b^2 (2 \cos^2 \psi - 1) r^{[0]}$$

$$r^{[3]} = \int \frac{r^3}{r^2 - 2b \cos \psi r + b^2} dr = \frac{r^2}{2} - b^2 r^{[1]} + (2b \cos \psi) r^{[2]}$$

$$r^{[4]} = \int \frac{r^4}{r^2 - 2b \cos \psi r + b^2} dr = \frac{r^3}{3} - b^2 r^{[2]} + (2b \cos \psi) r^{[3]}$$

$$f(\psi, r) = (\sin^2 \psi + \kappa \cos^2 \psi) r^{[4]} - (2b \kappa \cos \psi) r^{[3]} + (b^2 \kappa) r^{[2]}$$

$$M_1 = 2\pi \delta_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\psi, r_0) - f(\psi, 0)] \sin \psi d\psi = 5.969\ 280\ 28 \times 10^{27} \text{g/cm}^3$$

在以上数值积分中,若令 $\kappa = 1$ 、 $\delta_E = \delta_0$,则 $M' = 5.976\ 019\ 48 \times 10^{27} \text{g/cm}^3$ 。

7.6.2 地心坐标系

$$\text{密度函数: } \delta(\theta) = \delta_E (\sin^2 \theta + \kappa \cos^2 \theta)$$

$$\text{椭球方程: } r_0^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$$

$$M_2 = \int \delta d\tau = 2 \times 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \sin\theta d\theta \int_0^{r_0} r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \delta_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta (\sin^2 \theta + \kappa \cos^2 \theta) r_0^3 d\theta$$

式中, $d\tau = r^2 \sin\theta d\lambda d\theta dr$ 。

$$M_2 = \frac{4\pi\delta_E a^3 b^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta (\sin^2 \theta + \kappa \cos^2 \theta)}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta =$$

$$\frac{4\pi\delta_E a^3 b^3}{3} \int_0^1 \frac{1 - x^2 + \kappa x^2}{(a^2 x^2 + b^2 - b^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = 5.969\ 280\ 30 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$$

在以上数值积分中,若令 $\kappa = 1, \delta_E = \delta_0$,则 $M'' = 5.976\ 019\ 50 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$ 。

在1980大地参考系统中, $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2$, $GM = 3\ 986\ 005 \times 10^{14} \text{ cm}^3/\text{s}^2$,则 $M = 5.976\ 019\ 49 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$ 。

比较 $M_1 = 5.969\ 280\ 28 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$ 而 $M_2 = 5.969\ 280\ 30 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$,二者几乎相等。这表明由“地心坐标纬向密度公式”转换而成的“极点坐标纬向密度公式”,取得了完全的一致。

比较 $M' = 5.976\ 019\ 48 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$ 、 $M'' = 5.976\ 019\ 50 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$ 、 $M = 5.976\ 019\ 49 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$,三者几乎相等。这表明由“地心坐标”和“极点坐标”计算椭球的体积是完全一致的。

比较 $M_1 = 5.969\ 280\ 28 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$ 与 $M' = 5.976\ 019\ 48 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$,及 $M_2 = 5.969\ 280\ 30 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$ 与 $M'' = 5.976\ 019\ 50 \times 10^{27} \text{ g/cm}^3$,差别为 $M_1/M' = 0.998\ 872$ 和 $M_2/M'' = 0.998\ 872$,这种差别是由于“准等位条件”的不完备而造成的。

待定常数和是采用正演方法得到的,故不存在反演方法中的非唯一性问题。联立方程式(7-28)的约束条件是水准椭球极点和赤道的重力值,而不是整个水准椭球表面的重力值;也就是说,式(7-29)和式(7-30)仅仅满足“准等位条件”,而非等位条件。

对于参数椭球而言,“准等位条件”和等位条件并不是无关的。由第5章可知,在极点和赤道重力位相等的约束条件下,当参数椭球内的界面无限趋向参数椭球表面时,参数椭球的内椭球趋向麦克劳林椭球。也就是说,在匀质分层的情况下,椭球的“准等位条件”可以转化为等位条件。但是,对于纬向密度函数来说,情况要复杂得多。也许可以这样说,谁能够求解出满足等位条件而不仅仅是满足“准等位条件”的纬向密度分布函数,谁就摘取了一颗地球重力学中闪光的宝石。

第 8 章 地幔纬向正常密度函数

CHAPTER 8 Latitudinal Normal Density Function of Mantle

Abstract: Gravity anomaly is relative normal gravity. The mantle density anomaly $\Delta\delta_e$ used to research dynamics of plate motion should relative mantle latitudinal normal density $\delta_e(B)$. Before $\Delta\delta_e$ is solved, $\delta_e(B)$ should be solved first. Suppose if earth core is homogeneous spheroid and crust merge into mantle, this chapter using parameter spheroid solved preliminarily mantle latitudinal normal density $\delta_e(B)$ meeting gravity condition at earth pole and equator. Thereby mantle density anomaly obtained theory basis.

板块运动最有可能的动力是地幔物质流动,这一点已为大多数地球科学家所共识。但是,地幔物质为什么会流动?提出地幔对流假说的霍姆斯没有解答。对于这个问题,我们的设想是“地幔密度异常”具有特殊意义。地球重力学中的“重力异常”是相对“正常重力”而言的。所以,用于研究板块运动动力问题的“地幔密度异常” $\Delta\delta_e$ 也应该是相对“地幔纬向正常密度” $\delta_e(B)$ 而言的;也就是说,在求解 $\Delta\delta_e$ 之前,应先求解出 $\delta_e(B)$ 。

本章以“参数椭球”为工具,在假设地核为匀质椭球和地壳并入地幔的前提下,初步求解出了满足极点与赤道重力条件的“地幔纬向正常密度函数” $\delta_e(B)$,从而使得“地幔密度异常”的提法在理论上获得了依据^[20]。

§8.1 匀质地核椭球在赤道与极点的引力

由第3章可知,参数椭球是一种带密度参数和界面深度参数的函数椭球,参数椭球可作为一种分析分层旋转椭球的重力效应的数学工具。

如图8-1所示,参数椭球由两个相似的旋转椭球构成: a 、 b 和 a_n 、 b_n 分别为外、内椭球的长、短半径, δ_i 和 δ_e 为内、外“密度参数”, n 为内、外椭球分界面的“深度参数”。

$$a_n = na, b_n = nb, 0 < n < 1, e'_n{}^2 = \frac{a_n^2 - b_n^2}{b_n^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2 \quad (8-1)$$

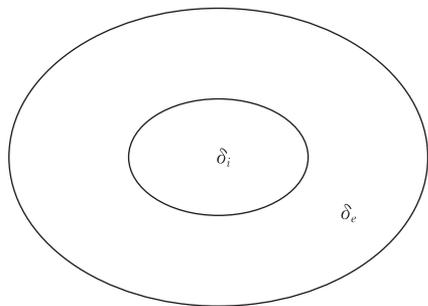


图8-1 参数椭球

地球和地核的平均半径为6 371 km和3 473 km,地壳平均厚度为33 km,若将地壳并入地幔,则核幔边界的深度参数 n 可由下式确定。

$$a(1 - n) + b(1 - n) = 2 \times (6\,371 - 3\,473), \\ n = 0.544\,872 \quad (8-2)$$

由 $JB(A'')$ 地球密度模型^[21]可求得地幔平均密度为 $\delta_e = 4.658 \text{ g/cm}^3$,若地球平均密度为 $\delta_0 = 5.517 \text{ g/cm}^3$,则地核椭球的匀质密度为

$$\delta_i = \frac{1}{n^3}(\delta_0 - \delta_e) + \delta_e = 9.968 \text{ g/cm}^3 \quad (8-3)$$

作为参数椭球的内椭球,地核椭球在外椭球表面的引力为

$$\left\{ \begin{aligned} v_i &= [(P_3 a^4 \cos^2 B + Q_3^2 b^4 \sin^2 B) / (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)]^{1/2} \\ P_3 &= 2\pi G \delta_i \frac{1 + e_n'^2}{e_n'^3} \left(\arctan e_c'' - \frac{e_c''}{1 + e_c'^2} \right), \quad Q_3 = 4\pi G \delta_i \frac{1 + e_n'^2}{e_n'^3} (e_c'' - \arctan e_c'') \\ 2c &= \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2) \\ e_c'' &= \frac{b_n e_n'}{\sqrt{b_n^2 + c}}, \quad \rho^2 = \frac{(a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B)}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)} \end{aligned} \right. \quad (8-4)$$

式中, G 为万有引力常数; B 为纬度。

顾及式(8-1)并将 $\delta_i = 9.968$ 和 $n = 0.544872$ 代入式(8-4), 便可求得匀质地核椭球在地球赤道 ($B = 0^\circ$) 与极点 ($B = 90^\circ$) 的引力分别为

$$v_i^{\text{赤}} = 286.549965 \text{ (Gal)}, \quad v_i^{\text{极}} = 287.963478 \text{ (Gal)} \quad (8-5)$$

§8.2 地幔纬向正常密度函数

由纬向密度的定义可知,“地球纬向密度”为某纬度“地表至地心向径的垂直平均密度”。第7章求解出地球的“纬向正常密度函数”为

$$\delta(B) = \sqrt{\delta_E^2 \cos^2 B + \delta_P^2 \sin^2 B} \quad (8-6)$$

式中, δ_E 和 δ_P 为地球赤道与极点的纬向正常密度。

设“地幔纬向密度”为某纬度“壳幔边界至核幔边界向径的垂直平均密度”, 参照式(8-6), 则地幔的纬向正常密度函数可表示为

$$\delta_e(B) = \sqrt{\delta_E'^2 \cos^2 B + \delta_P'^2 \sin^2 B} \quad (8-7)$$

式中, 待定常数 δ_E' 与 δ_P' 为地幔的赤道与极点的纬向正常密度。

为了求解式(8-7)中的待定常数 δ_E' 与 δ_P' , 设地核为匀质椭球、并将地壳并入地幔之中, 则有 $\delta_i = \delta_i \delta_e = \delta_e(B)$, 参见图8-2。

图8-2是带纬向密度分布的核幔模型, 与图8-1不同的是, 地幔中不再是匀质密度 δ_e , 而是纬向密度 $\delta_e = \delta_e(B)$, 也就是我们要求解的“地幔纬向正常密度函数”。

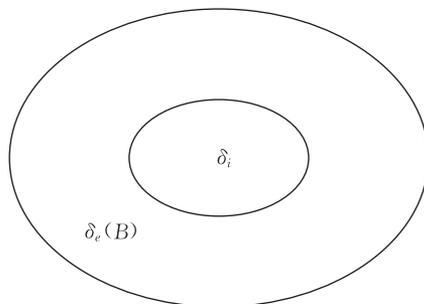


图8-2 地幔为纬向密度分布

§8.3 地幔极点重力纬向密度积分公式

推导“地幔极点重力纬向密度积分公式”时,采用“极原点坐标系”(见图8-3), r 为以南极点为坐标原点的向径, ψ 为极距, λ 为经度,地球椭球面方程 r_0 和地核椭球面方程 r_1 的表达式分别为

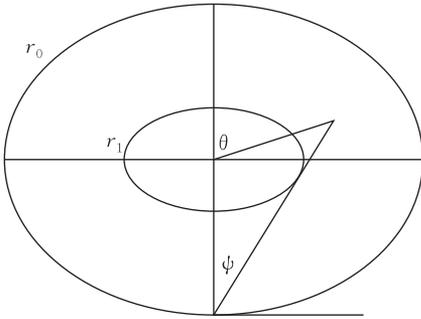


图8-3 极原点坐标系

$$\begin{aligned} \frac{r_0^2 \sin^2 \psi}{a^2} + \frac{(r_0 \cos \psi - b)^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{r_1^2 \sin^2 \psi}{a_n^2} + \frac{(r_1 \cos \psi - b)^2}{b_n^2} &= 1 \\ r_0 &= \frac{2b(1 + e'^2) \cos \psi}{1 + e'^2 \cos^2 \psi} \end{aligned} \quad (8-8)$$

$$\left(\frac{1 + e'^2 \cos^2 \psi}{a^2} \right) r_1^2 - \frac{2 \cos \psi}{b} r_1 + (1 - n^2) = 0 \quad (8-9)$$

从图8-3中可以看出,地核椭球面方程 r_1 有两个解。于是,由式(8-9)可得

$$r_1' = \frac{a^2 \cos \psi + a \sqrt{a^2 \cos^2 \psi - b^2(1 - n^2)(1 + e'^2 \cos^2 \psi)}}{b(1 + e'^2 \cos^2 \psi)} \quad (8-10)$$

$$r_1'' = \frac{a^2 \cos \psi - a \sqrt{a^2 \cos^2 \psi - b^2(1 - n^2)(1 + e'^2 \cos^2 \psi)}}{b(1 + e'^2 \cos^2 \psi)} \quad (8-11)$$

见图8-3,过原点作直线与 r_1 相切,因切点处 $r_1' = r_1''$,故切线的极距 ψ_1 可由下式计算为

$$(1 + e'^2 n^2) \cos^2 \psi_1 = 1 - n^2, \quad \psi_1 = 33.103894218564^\circ \quad (8-12)$$

采用水准椭球的极点重力与匀质地核椭球在极点的引力的差值 $\gamma_p - v_i^{\text{极}}$ 为约束条件,则“地幔极点重力纬向密度积分公式”为

$$\gamma_p - v_i^{\text{极}} = G \int_{\tau} \delta_e \frac{r \cos \psi}{r^3} d\tau = G \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta_e \cos \psi \sin \psi d\psi \int_{r_1}^{r_0} dr \quad (8-13)$$

式中, $d\tau = r^2 \sin \psi d\lambda d\psi dr$ 。

参见图8-3,以切点为界,则 $r_1' > r_1''$,故式(8-13)可改写为

$$\frac{\gamma_p - v_i^{\text{极}}}{2\pi G} = \int_0^{\psi_1} \delta_e \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^{r_1'} dr + \int_0^{\psi_1} \delta_e \cos \psi \sin \psi d\psi \int_{r_1''}^{r_0} dr + \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \delta_e \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^{r_0} dr \quad (8-14)$$

为求积分之便,将纬度 B 转换成地心纬度的余角 θ ,则式(8-7)可近似为

$$\delta_e = \delta_e(\theta) = \delta_e' \sin^2 \theta + \delta_e'' \cos^2 \theta \quad (8-15)$$

令 $\kappa' = \frac{\delta'_p}{\delta'_E}$, 则式(8-15)变为

$$\delta_e(\theta) = \delta'_E(\sin^2\theta + \kappa'\cos^2\theta) \quad (8-16)$$

参见图 8-3, 由正弦定理可得

$$\frac{r}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{b}{\sin(\theta - \psi)} \quad (8-17)$$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, $\sin(\theta - \psi) = \sin\theta\cos\psi - \cos\theta\sin\psi$, $\cos^2\theta = 1/(1 + \tan^2\theta)$

由以上三角函数关系, 式(8-17)可变为

$$\cos^2\theta = \frac{(r\cos\psi - b)^2}{r^2 + b^2 - 2rb\cos\psi}, \quad \sin^2\theta = \frac{(r\sin\psi)^2}{r^2 + b^2 - 2rb\cos\psi} \quad (8-18)$$

将式(8-18)代入式(8-16)可得

$$\delta_e = \delta'_E \frac{(\sin^2\psi + \kappa'\cos^2\psi)r^2 - (2b\kappa'\cos\psi)r + b^2\kappa'}{r^2 - (2b\cos\psi)r + b^2} = \delta'_E\delta_1(\psi, r) \quad (8-19)$$

虽然 θ 的定义在图 8-3 椭圆中的第一象限为顺时针向、第四象限为逆时针向, 但是不难证明式(8-19)具有对称性, 同时适用于这两个象限。于是, 将式(8-19)代入式(8-14)可得

$$\frac{\gamma_p - v_i^{\text{极}}}{2\pi G} = \delta'_E \left\{ \int_0^{\psi_1} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_0^{r_1'} \delta_1(\psi, r) dr + \int_0^{\psi_1} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_{r_1'}^{r_0} \delta_1(\psi, r) dr + \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_0^{r_0} \delta_1(\psi, r) dr \right\} \quad (8-20)$$

对式(8-19), 查不定积分表可得

$$\delta_{\text{极}}(\psi, r) = \int \delta_1(\psi, r) dr = (\sin^2\psi + \kappa'\cos^2\psi)r + b\sin^2\psi(1 - \kappa') \cdot \left[\cos\psi \ln(r^2 - 2b\cos\psi r + b^2) + \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} \arctan \frac{r - b\cos\psi}{b\sin\psi} \right] \quad (8-21)$$

应用式(8-21), 式(8-20)变为

$$\frac{\gamma_p - v_i^{\text{极}}}{2\pi G} = \delta'_E \left\{ \int_0^{\psi_1} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{极}}(\psi, r_1'') - \delta_{\text{极}}(\psi, 0) + \delta_{\text{极}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{极}}(\psi, r_1')] d\psi + \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{极}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{极}}(\psi, 0)] d\psi \right\} \quad (8-22)$$

以上就是地幔的“极点重力纬向密度积分公式”。式中, r_0 、 r_1' 和 r_1'' 由式(8-8)、式(8-10)和式(8-11)给出。

§8.4 地幔赤道重力纬向密度积分公式

“地幔极点重力纬向密度积分公式”(8-22)中有两个未知数 δ'_E 和 κ' , 所以我们还需求解“地幔赤道重力纬向密度积分公式”。

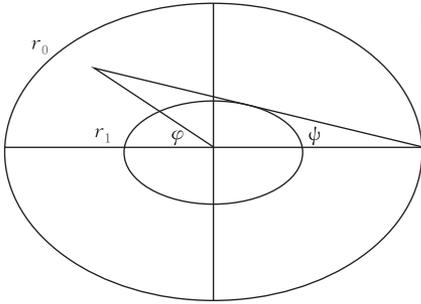


图 8-4 赤道原点坐标系

推导“地幔赤道重力纬向密度积分公式”时,采用“赤道原点坐标系”(见图 8-4), r 为以赤道点为坐标原点的向径, ψ 为极距, λ 为广义经度,地球椭球面方程 r_0 和地核椭球面方程 r_1 的表达式分别为

$$\frac{r_0^2 \sin^2 \psi \cos^2 \lambda + (r_0 \cos \psi - a)^2}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \psi \sin^2 \lambda}{b^2} = 1$$

$$\frac{r_1^2 \sin^2 \psi \cos^2 \lambda + (r_1 \cos \psi - a)^2}{a_n^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \psi \sin^2 \lambda}{b_n^2} = 1$$

$$r_0 = \frac{2a \cos \psi}{1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \lambda} \quad (8-23)$$

$$\frac{1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \lambda}{a^2} r_1^2 - \frac{2 \cos \psi}{a} r_1 + (1 - n^2) = 0 \quad (8-24)$$

从图 8-4 中可以看出,地核椭球面方程 r_1 有两个解。于是,由式(8-24)可得

$$r_1' = \frac{a \cos \psi + a \sqrt{\cos^2 \psi - (1 - n^2)(1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \lambda)}}{1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \lambda} \quad (8-25)$$

$$r_1'' = \frac{a \cos \psi - a \sqrt{\cos^2 \psi - (1 - n^2)(1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \lambda)}}{1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \lambda} \quad (8-26)$$

由式(8-23)、式(8-25)和式(8-26)可见, r_0 、 r_1' 和 r_1'' 随 λ 的变化仅产生微小变化,故取 λ 为其变化值的中数 $\bar{\lambda}$ 、 $\sin^2 \lambda = \sin^2 \bar{\lambda}$, 于是可得

$$r_0 = \frac{2a \cos \psi}{1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \bar{\lambda}} \quad (8-27)$$

$$r_1' = \frac{a \cos \psi + a \sqrt{\cos^2 \psi - (1 - n^2)(1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \bar{\lambda})}}{1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \bar{\lambda}} \quad (8-28)$$

$$r_1'' = \frac{a \cos \psi - a \sqrt{\cos^2 \psi - (1 - n^2)(1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \bar{\lambda})}}{1 + e'^2 \sin^2 \psi \sin^2 \bar{\lambda}} \quad (8-29)$$

见图 8-4, 过原点作直线与 r_1 相切, 切点处 $r'_1 = r''_1$, 切线极距 ψ_2 满足下式

$$n^2 = \sin^2 \psi_2 [1 + (1 - n^2) e'^2 \sin^2 \bar{\lambda}] \quad (8-30)$$

地幔的“赤道重力纬向密度积分公式”采用水准椭球的赤道重力与匀质地核椭球在赤道的引力的差值为约束条件, 其表达式为

$$\gamma_e + a\omega^2 - v_i^{\text{赤}} = G \int_{\tau} \delta_e \frac{r \cos \psi}{r^3} d\tau = G \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta_e \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{r_1}^{r_0} dr$$

式中, $d\tau = r^2 \sin \psi d\lambda d\psi dr$ 。

由于式(8-27)、式(8-28)和式(8-29)中已不含变量 λ , 故上式可改写为

$$\frac{\gamma_e + a\omega^2 - v_i^{\text{赤}}}{2\pi G} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta_e \cos \psi \sin \psi d\psi \int_{r_1}^{r_0} dr \quad (8-31)$$

参见图 8-4, 以切点为界, 则 $r'_1 > r''_1$, 故式(8-31)可改写为

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_e + a\omega^2 - v_i^{\text{赤}}}{2\pi G} &= \int_0^{\psi_2} \delta_e \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^{r'_1} dr + \int_0^{\psi_2} \delta_e \cos \psi \sin \psi d\psi \int_{r'_1}^{r_0} dr + \\ &\int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} \delta_e \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^{r_0} dr \end{aligned} \quad (8-32)$$

为了确定 $\bar{\lambda}$, 令 $\delta_e = \delta_0$, 则上式变为

$$\frac{g_e + a\omega^2 - v_i^{\text{赤}}(\delta_i = \delta_0)}{2\pi G} = \delta_0 \left[\int_0^{\psi_2} \cos \psi \sin \psi (r''_1 + r_0 - r'_1) d\psi + \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin \psi r_0 d\psi \right]$$

式中, δ_0 为匀质椭球密度, g_e 为匀质椭球赤道重力, $v_i^{\text{赤}}(\delta_i = \delta_0)$ 为以 δ_0 为匀质密度的地核椭球在赤道的引力, 三者均为已知常数。将上式与式(8-30)联立, 采用数值积分方法可算出 $\sin^2 \bar{\lambda} = 0.499\ 628$, $\psi_2 = 32.971\ 932\ 236\ 798^\circ$ 。

在图 8-4 中, φ 为地心纬度, 故式(8-16)可改写为

$$\delta_e(\varphi) = \delta'_E (\cos^2 \varphi + \kappa' \sin^2 \varphi) \quad (8-33)$$

参见图 8-4, 由正弦定理可得

$$\frac{r}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{a}{\sin(\varphi - \psi)} \quad (8-34)$$

对照式(8-18)可得

$$\cos^2 \varphi = \frac{(r \cos \psi - a)^2}{r^2 + a^2 - 2r a \cos \psi}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{(r \sin \psi)^2}{r^2 + a^2 - 2r a \cos \psi} \quad (8-35)$$

将式(8-35)代入式(8-33)可得

$$\delta_e = \delta'_E \frac{(\kappa' \sin^2 \psi + \cos^2 \psi) r^2 - (2a \cos \psi) r + a^2}{r^2 - (2a \cos \psi) r + a^2} = \delta'_E \delta_2(\psi, r) \quad (8-36)$$

虽然 φ 的定义在图 8-4 椭圆中的第二象限为顺时针向、第一象限为逆时针向, 但是不难证明式(8-36)具有对称性、同时适用于这两个象限。于是, 将上式代入式(8-32)可得

$$\frac{\gamma_e + a\omega^2 - v_i^{\text{赤}}}{2\pi G} = \delta'_E \left\{ \int_0^{\psi_2} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_0^{r_1'} \delta_2(\psi, r) dr + \int_0^{\psi_2} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_{r_1'}^{r_0} \delta_2(\psi, r) dr + \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_0^{r_0} \delta_2(\psi, r) dr \right\} \quad (8-37)$$

对式(8-36),查不定积分表可得

$$\delta_{\text{赤}}(\psi, r) = \int \delta_2(\psi, r) dr = (\kappa' \sin^2\psi + \cos^2\psi)r + a \sin^2\psi (\kappa' - 1) \cdot \left[\cos\psi \ln(r^2 - 2a \cos\psi r + a^2) + \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} \arctan \frac{r - a \cos\psi}{a \sin\psi} \right] \quad (8-38)$$

应用式(8-38),则式(8-37)变为

$$\frac{\gamma_e + a\omega^2 - v_i^{\text{赤}}}{2\pi G} = \delta'_E \left\{ \int_0^{\psi_2} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{赤}}(\psi, r_1'') - \delta_{\text{赤}}(\psi, 0) + \delta_{\text{赤}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{赤}}(\psi, r_1')] d\psi + \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{赤}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{赤}}(\psi, 0)] d\psi \right\} \quad (8-39)$$

以上就是地幔的“赤道重力纬向密度积分公式”。式中, r_0 、 r_1' 和 r_1'' 由式(8-28)、式(8-28)和式(8-29)给出, $\sin^2\bar{\lambda} = 0.499\ 628$ 、 $\psi_2 = 32.971\ 932\ 236\ 798^\circ$

§8.5 待定常数的求解与地幔密度扁率

为行文之便,将“地幔极点重力纬向密度积分公式”(8-22)和“地幔赤道重力纬向密度积分公式”(8-39)表达为

$$\frac{\gamma_p - v_i^{\text{极}}}{2\pi G} = \delta'_E f_{\text{极}}(\kappa'), \quad \frac{\gamma_e + a\omega^2 - v_i^{\text{赤}}}{2\pi G} = \delta'_E f_{\text{赤}}(\kappa') \quad (8-40)$$

消去 δ'_E 后可得

$$\frac{\gamma_p - v_i^{\text{极}}}{\gamma_e + a\omega^2 - v_i^{\text{赤}}} = \frac{f_{\text{极}}(\kappa')}{f_{\text{赤}}(\kappa')} \quad (8-41)$$

上式中只有一个未知数 κ' ,故可采用数值积分方法计算得 $\kappa' = 1.003\ 306\ 39$,代入式(8-40)可算得 $\delta'_E = 4.650\ 852\ \text{g/cm}^3$ 及 $\delta'_p = \kappa' \delta'_E = 4.666\ 229\ \text{g/cm}^3$ 。

于是由式(8-33)和式(8-7),“地幔纬向正常密度函数”为

$$\delta_e(\varphi) = 4.650\ 852 \cos^2\varphi + 4.666\ 229 \sin^2\varphi \quad (8-42)$$

$$\delta_e(B) = \sqrt{4.650\ 852^2 \cos^2 B + 4.666\ 229^2 \sin^2 B} \quad (8-43)$$

式中, φ 为椭球地心纬度; B 为椭球地理纬度。数值验算表明,以上两式差别不大。在求解待定常数的计算过程中, $a = 637\ 813\ 700\ \text{cm}$ 、 $b = 635\ 675\ 200\ \text{cm}$ 、 $\omega = 7\ 292\ 115 \times 10^{-11}\ \text{s}^{-1}$ 、 $G = 6.67 \times 10^{-8}\ \text{cm}^3/(\text{gs}^2)$ 、 $v_i^{\text{赤}}$ 与 $v_i^{\text{极}}$ 的数值由式(8-5)给出, $\gamma_p = 983.218\ 637\ \text{Gal}$ 、 $\gamma_e = 978.032\ 726\ \text{Gal}$ 在第1章中给出。由上式可算出理想

地幔(地核为匀质椭球和地壳并入地幔)的密度扁率为

$$f'_{\text{地幔}} = \frac{\delta'_p - \delta'_E}{\delta'_p} = \frac{1}{303} \quad (8-44)$$

在得到“地幔纬向正常密度”的分布函数 $\delta_e(B)$ 之后,如果能够直接测量到“地幔实际密度”,便可由“‘异常’=‘实际’-‘正常’”的关系,得到可能用于定量研究板块运动动力问题的“地幔密度异常” $\Delta\delta_e$ 。

§8.6 “剩余重力扁率”与密度扁率的数量关系

在物理大地测量学中,克莱劳定理给出了地球的重力扁率与几何扁率的数学关系,那么地球的重力扁率与密度扁率又是一种什么样的数量关系呢?第7章和本章解算出地球的密度扁率和理想地幔的密度扁率分别为 $1/127$ 和 $1/303$,从表面上看,这个结果不易让人理解。因为理想地幔对应的是匀质地核椭球,其密度扁率为零,这样一来整体地球的纬向密度应该被“浓缩”在地幔之中,因此,地球的密度扁率应该小于理想地幔的密度扁率才对。然而,由第4章中的“密度分布定理”可知:当分层椭球的重力扁率大于匀质椭球的重力扁率时,其内密度大于外密度;当分层椭球的重力扁率小于匀质椭球的重力扁率时,其内密度小于外密度。这就是说,如果参数椭球的内密度 δ_i 大于外密度 δ_e ,那么参数椭球的重力扁率就大于匀质椭球的重力扁率,也就比匀质椭球的重力扁率更接近水准椭球的重力扁率。实际上,决定地球密度扁率数值大小的不是水准椭球的重力扁率,而是水准椭球的重力扁率与匀质椭球的重力扁率的差,我们不妨称其为地球的“剩余重力扁率” $\Delta\beta_E$ 。

$$\Delta\beta_E = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_p} - \frac{g_p - g_e}{g_p} = \frac{1}{189.6} - \frac{1}{242.6} = \frac{1}{867.9} \quad (8-45)$$

式中, $g_e = 978.412\ 041$ Gal; $g_p = 982.462\ 550$ Gal; $\gamma_e = 978.032\ 726$ Gal; $\gamma_p = 983.218\ 637$ Gal。

既然地球的“剩余重力扁率” $\Delta\beta_E$ 是水准椭球的重力扁率与匀质椭球的重力扁率的差,那么理想地幔的“剩余重力扁率” $\Delta\beta_M$ 则应该等于水准椭球的重力扁率与匀质分层椭球的重力扁率的差

$$\Delta\beta_M = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_p} - \frac{g_p^{\text{参}} - g_e^{\text{参}}}{g_p^{\text{参}}} \quad (8-46)$$

由于参数椭球的质量 M 是不变的,所以参数椭球有两个独立参数, n 为界面“深度参数”, δ_e 为“密度参数”,而内密度 δ_i 则为 n 和 δ_e 的函数。

$$\delta_i n^3 + \delta_e (1 - n^3) = \delta_0, \quad \delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b} \quad (8-47)$$

取地球平均半径为 6 371 km、地核平均半径为 3 473 km,则核幔边界的深度参数 n 可确定为 0. 544 872。将 n 代入式 (8-47)、并取地幔平均密度为 $\delta_e = 4. 658 \text{ g/cm}^3$,则地核的平均密度可计算为 $\delta_i = 9. 968 \text{ g/cm}^3$ 。

由第 3 章可知,参数椭球表面的重力公式为

$$g_{\oplus} = \sqrt{\frac{(P - \omega^2)^2 a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (8-48)$$

$$P = 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left[(\delta_i - \delta_e) \left(\arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''_c} \right) + \delta_e \left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) \right] \quad (8-49)$$

$$Q = 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} [(\delta_i - \delta_e) (e''_c - \arctan e''_c) + \delta_e (e' - \arctan e')] \quad (8-50)$$

$$c = \frac{1}{2} [\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n b^2 - \rho^2)] \quad (8-51)$$

$$\rho^2 = (a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B) / (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B), \quad e''_c = \frac{n b e'}{\sqrt{n^2 b^2 + c}} \quad (8-52)$$

将 $\delta_e = 4. 658 \text{ g/cm}^3$ 、 $\delta_i = 9. 968 \text{ g/cm}^3$ 和 $n = 0. 544 872$ 代入上式,便可求得参数椭球赤道 ($B = 0^\circ$) 与极点 ($B = 90^\circ$) 的重力分别为

$$g_e^{\oplus} = 978. 195 612 \text{ Gal}, \quad g_p^{\oplus} = 982. 896 510 \text{ Gal} \quad (8-53)$$

将上式代入式(8-46)可得

$$\Delta\beta_M = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_p} - \frac{g_p^{\oplus} - g_e^{\oplus}}{g_p^{\oplus}} = \frac{1}{189. 6} - \frac{1}{209. 1} = \frac{1}{2 033. 1} \quad (8-54)$$

由式(8-45)、式(8-54)和式(7-31)、式(8-44)可得地球与理想地幔的密度扁率与剩余重力扁率的关系为

$$f'_E = \frac{1}{127}, \quad \Delta\beta_E = \frac{1}{867. 9}, \quad f'_E = 6. 8\Delta\beta_E \quad (8-55)$$

$$f'_M = \frac{1}{303}, \quad \Delta\beta_M = \frac{1}{2 033. 1}, \quad f'_M = 6. 7\Delta\beta_M \quad (8-56)$$

由以上两式可见,密度扁率与剩余重力扁率成正比,比例系数为 6. 7 至 6. 8 之间。

第 9 章 似水准椭球

CHAPTER 9 Quasi Level Spheroid

Abstract: We call two points equipotent at earth pole and equator as quasi level condition and call whirl spheroid meeting (a, b, GM, ω) and quasi level condition as quasi level spheroid. Homogeneous spheroid using (a, b, GM, ω) as fundamental constant satisfies neither level condition nor quasi level condition. Adjusting density inner the spheroid and holding total mass unchanged, gravity potential on spheroid satisfies level condition or quasi level condition. This is the basic method for the density research of level spheroid. Quasi level condition is approximation of level condition. Quasi level spheroid is approximation of level spheroid. The research of quasi level condition and quasi level spheroid is much easier than the research of level condition and level spheroid.

不论是水准椭球还是匀质椭球,其表面重力都只是纬度的函数,且基本上可近似为纬度的线形函数。由第4章可知,当分层旋转椭球的密度分布发生变化时,椭球表面的重力曲线只能围绕“重力聚点”旋转。所以,对于 (a, b, GM, ω) 相同但密度分布不同的旋转椭球来说,只要满足椭球极点和赤道两点的重力等位条件,就能够近似满足椭球表面的重力等位条件。因此,我们把极点和赤道“两点等位条件”,称为“准等位条件”;把满足 (a, b, GM, ω) 和“准等位条件”的旋转椭球,称为“似水准椭球”^[21]。以 (a, b, GM, ω) 为基本常数的匀质椭球不满足等位条件,也不满足“准等位条件”。对匀质椭球内的密度进行质量不变的调整,使之满足等位、或“准等位”条件,这应该是我们研究水准椭球密度分布问题的基本方法。“准等位条件”是等位条件的一种近似,“似水准椭球”就是水准椭球的一种近似,但研究“准等位条件”和“似水准椭球”,要比研究等位条件和水准椭球简单得多。

§9.1 “匀质分层”模式的似水准椭球

由第3章可知,参数椭球由“匀质分层”的双层椭球构成。参见图9-1, δ_i 为内密度参数, δ_e 为外密度参数, n 为界面深度参数。外椭球的长、短半径分别为 a 和 b , 内椭球的长、短半径分别为 $a_n = na$ 、 $b_n = bn$, $0 < n < 1$ 。

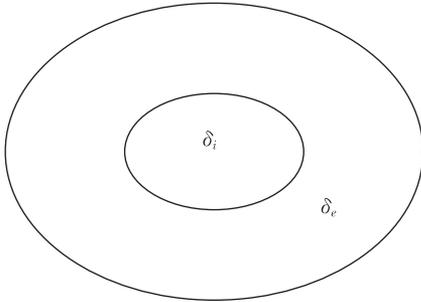


图9-1 匀质分层的似水准椭球

由于参数椭球的总质量 M 是不变的,对于不加约束条件的参数椭球来说, δ_i 、 δ_e 和 n 这三个参数只有两个是独立的,三者应满足以下函数关系

$$\delta_i = \frac{1}{n^3}(\delta_0 - \delta_e) + \delta_e \quad (9-1)$$

由第6章可知,如果用“准等位条件”来约束参数椭球, δ_i 、 δ_e 和 n 这三个参数只有一个独立的,除了以上 δ_i 、 δ_e 和 n 的函数关系外, δ_i 和 n 还要满足以下函数关系

$$\delta_i = \frac{\delta_0}{n^3} - \left(\frac{1-n^3}{n^3} \right) \frac{\delta_0 E'_a - \frac{\omega^2 e'^3 n^3}{2\pi G(1+e'^2)} - \frac{2b\delta_0}{a(1+\beta)} E'_b}{\frac{2b}{a(1+\beta)} (n^3 E' - E'_b) - (n^3 E'' - E''_a)} \quad (9-2)$$

式中

$$\delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b}, \quad \beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}$$

$$E' = e' - \arctane', \quad E'' = \arctane' - \frac{e'}{1 + e'^2}$$

$$E'_b = e''_b - \arctane''_b, \quad E''_a = \arctane''_a - \frac{e''_a}{1 + e''_a{}^2}$$

其中

$$e''_a = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2b^2 + c_a}}, \quad e''_b = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2b^2 + c_b}}$$

$$c_a = \frac{1}{2} [\sqrt{(n^2a^2 + n^2b^2 - a^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1 - n^2)} - (n^2a^2 + n^2b^2 - a^2)]$$

$$c_b = \frac{1}{2} [\sqrt{(n^2a^2 + n^2b^2 - b^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1 - n^2)} - (n^2a^2 + n^2b^2 - b^2)]$$

把参数椭球当成地球模型,于是,地球的平均半径为 6 371 km,地核的平均半径为 3 473 km,将地壳并入地幔,则可算得核幔边界的深度参数为 $n = 0.544 872$ 。将 n 代入式(9-2),可算得 $\delta_i = 13.287 \text{ g/cm}^3$ 。再将 n 和 δ_i 代入式(9-1),可算得 $\delta_e = 4.018 \text{ g/cm}^3$ 。所以,“匀质分层”模式的“似水准椭球”的密度分布方式为

$$n = 0.544 872, \quad \delta_e = 4.018 \text{ g/cm}^3, \quad \delta_i = 13.287 \text{ g/cm}^3 \quad (9-3)$$

§9.2 “整体纬向”模式的似水准椭球

为了研究水准椭球密度按纬度分布的函数形式,第7章提出了“纬向密度”概念:旋转椭球的向径可由地心纬度确定,定义该向径上所有点密度的平均值为旋转椭球在该纬度的“纬向密度”,参见图9-2。

由第7章可知,设极点和赤道的“纬向密度”分别为 δ_p 和 δ_E ,则旋转椭球纬向密度的函数形式为

$$\delta(\varphi) = \delta_E(\cos^2\varphi + \kappa\sin^2\varphi), \quad \kappa = \frac{\delta_p}{\delta_E} \quad (9-4)$$

由第7章可知,为了求解式(9-4)中的 δ_E 和 κ 的数值,以“准等位条件”约束椭球,这时,极点重力的纬向密度积分公式为

$$\gamma_p = 2\pi G\delta_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{极}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{极}}(\psi, 0)] d\psi \quad (9-5)$$

式中

$$r_0 = \frac{2b(1 + e'^2)\cos\psi}{1 + e'^2\cos^2\psi}$$

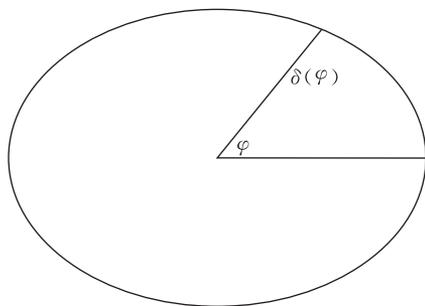


图9-2 整体纬向的似水准椭球

$$\delta_{\text{核}}(\psi, r) = (\sin^2\psi + \kappa\cos^2\psi)r + b\sin^2\psi(1 - \kappa) \cdot \left[\cos\psi \ln(r^2 - 2br\cos\psi + b^2) + \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} \arctan \frac{r - b\cos\psi}{b\sin\psi} \right]$$

在“准等位条件”的约束下,赤道重力的纬向密度积分公式为

$$\gamma_e + a\omega^2 = 2\pi G\delta_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{赤}}(\psi, r'_0) - \delta_{\text{赤}}(\psi, 0)] d\psi \quad (9-6)$$

式中

$$r'_0 = \frac{2a\cos\psi}{1 + 0.49952e'^2\sin^2\psi}$$

$$\delta_{\text{赤}}(\psi, r) = (\kappa\sin^2\psi + \cos^2\psi)r + a\sin^2\psi(\kappa - 1) \cdot \left[\cos\psi \ln(r^2 - 2ar\cos\psi + a^2) + \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} \arctan \frac{r - a\cos\psi}{a\sin\psi} \right]$$

联立式(9-5)和式(9-6),便可求解出 δ_E 和 κ 的数值,再代入式(9-4),则“似水准椭球”的纬向密度分布函数为

$$\delta(\varphi) = 5.496247\cos^2\varphi + 5.539862\sin^2\varphi \quad (9-7)$$

§9.3 “内匀外纬”模式的似水准椭球

第三种“似水准椭球”的模式为“内匀外纬”,参见图9-3。“内匀外纬”模式是“匀质分层”模式和“整体纬向”模式的结合。

由第8章可知,若设地幔平均密度为 $\delta_e = 4.658 \text{ g/cm}^3$,则由式(9-1)可算得地核椭球的匀质密度为 $\delta_i = 9.968 \text{ g/cm}^3$ 。“内匀外纬”模式的界面深度参数与“匀质分层”模式的相同, $n = 0.544872$ 。参数椭球的内椭球(地核椭球)在地球椭球表面的引力为

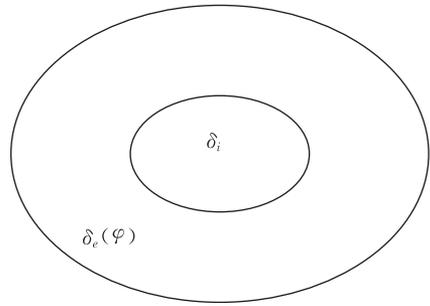


图9-3 内匀外纬的似水准椭球

$$v_i = \left[(P_3^2 a^4 \cos^2 B + Q_3^2 b^4 \sin^2 B) / (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$P_3 = 2\pi G\delta_i \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left(\arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''_c} \right), \quad Q_3 = 4\pi G\delta_i \frac{1 + e'^2}{e'^3} (e''_c - \arctan e''_c)$$

$$2c = \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)$$

$$e''_c = \frac{bne'}{\sqrt{n^2 b^2 + c}}, \quad \rho^2 = \frac{(a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B)}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)}$$

将 $\delta_i = 9.968 \text{ g/cm}^3$ 和 $n = 0.544872$ 代入上式,便可求得匀质地核椭球在地

球赤道 ($B = 0^\circ$) 与极点 ($B = 90^\circ$) 的引力分别为

$$\begin{aligned} v_i^{\text{赤}} &= 286.549\,965 \text{ Gal}, \\ v_i^{\text{极}} &= 287.963\,478 \text{ Gal} \end{aligned} \quad (9-8)$$

与式(9-4)相似, 设地幔极点和赤道的“纬向密度”分别为 δ'_p 和 δ'_E , 则地幔纬向密度的函数形式为

$$\delta_e(\varphi) = \delta'_E(\cos^2\varphi + \kappa'\sin^2\varphi), \quad \kappa' = \frac{\delta'_P}{\delta'_E} \quad (9-9)$$

由第8章可知, 为了求解式(9-9)中的 δ'_E 和 κ' 的数值, 以“准等位条件”约束椭球, 这时, 极点地幔重力的纬向密度积分公式为

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_p - v_i^{\text{极}}}{2\pi G} &= \delta'_E \left\{ \int_0^{\psi_1} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{极}}(\psi, r''_1) - \delta_{\text{极}}(\psi, 0) + \delta_{\text{极}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{极}}(\psi, r'_1)] \right. \\ &\quad \left. d\psi + \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{极}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{极}}(\psi, 0)] d\psi \right\}, \quad \psi_1 = 33.103\,894\,218\,564^\circ \end{aligned} \quad (9-10)$$

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{2b(1 + e'^2) \cos\psi}{1 + e'^2 \cos^2\psi} \\ r'_1 &= \frac{a^2 \cos\psi + a \sqrt{a^2 \cos^2\psi - b^2(1 - n^2)(1 + e'^2 \cos^2\psi)}}{b(1 + e'^2 \cos^2\psi)} \\ r''_1 &= \frac{a^2 \cos\psi - a \sqrt{a^2 \cos^2\psi - b^2(1 - n^2)(1 + e'^2 \cos^2\psi)}}{b(1 + e'^2 \cos^2\psi)} \\ \delta_{\text{极}}(\psi, r) &= (\sin^2\psi + \kappa' \cos^2\psi)r + b \sin^2\psi(1 - \kappa') \cdot \\ &\quad \left[\cos\psi \ln(r^2 - 2br \cos\psi + b^2) + \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} \arctan \frac{r - b \cos\psi}{b \sin\psi} \right] \end{aligned}$$

在“准等位条件”的约束下, 赤道地幔重力的纬向密度积分公式为

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_e + a\omega^2 - v_i^{\text{赤}}}{2\pi G} &= \delta'_E \left\{ \int_0^{\psi_2} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{赤}}(\psi, r''_1) - \delta_{\text{赤}}(\psi, 0) + \delta_{\text{赤}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{赤}}(\psi, r'_1)] \right. \\ &\quad \left. d\psi + \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi [\delta_{\text{赤}}(\psi, r_0) - \delta_{\text{赤}}(\psi, 0)] d\psi \right\}, \quad \psi_2 = 32.971\,932\,236\,798^\circ \end{aligned} \quad (9-11)$$

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{2a \cos\psi}{1 + e'^2 \sin^2\psi \sin^2\bar{\lambda}}, \quad \sin^2\bar{\lambda} = 0.499\,628 \\ r'_1 &= \frac{a \cos\psi + a \sqrt{\cos^2\psi - (1 - n^2)(1 + e'^2 \sin^2\psi \sin^2\bar{\lambda})}}{1 + e'^2 \sin^2\psi \sin^2\bar{\lambda}} \\ r''_1 &= \frac{a \cos\psi - a \sqrt{\cos^2\psi - (1 - n^2)(1 + e'^2 \sin^2\psi \sin^2\bar{\lambda})}}{1 + e'^2 \sin^2\psi \sin^2\bar{\lambda}} \end{aligned}$$

$$\delta_{\text{赤}}(\psi, r) = (\kappa' \sin^2 \psi + \cos^2 \psi) r + a \sin^2 \psi (\kappa' - 1) \cdot \left[\cos \psi \ln(r^2 - 2a \cos \psi + a^2) + \frac{\cos 2\psi}{\sin \psi} \arctan \frac{r - a \cos \psi}{a \sin \psi} \right]$$

联立式(9-10)、式(9-11)并顾及式(9-8),便可求解出 δ'_E 和 κ' 的数值,再代入式(9-9),则“内匀外纬”的“似水准椭球”的密度分布方式为

$$\delta_e(\varphi) = 4.650852 \cos^2 \varphi + 4.666229 \sin^2 \varphi \text{ g/cm}^3 \quad (9-12)$$

$$n = 0.544872, \delta_i = 9.968 \text{ g/cm}^3$$

从形式上看,“内匀外纬”的“似水准椭球”,应该比“匀质分层”和“整体纬向”的“似水准椭球”更接近地球的实际情况。

虽然“水准椭球非均匀的物质分布是一定存在的”,但水准椭球非均匀的物质分布在数学上并不是唯一的。由哈密顿原理可知:若 T 为系统的动能, S 为系统的势能,则 $L = T - S$ 为系统的拉格朗日函数,如果系统从时间 t_1 到时间 t_2 ,相对系统的可能运动而言,系统“真实”运动的哈密顿积分具有极小值,即 $H = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \min$ 。

以上给出的“似水准椭球”的三种密度分布方式,只是“似水准椭球”内部密度的几种“可能分布”,为了了解这几种可能的密度分布方式的“真实性”,进一步应该对与不同密度分布相对应的拉格朗日函数以及哈密顿积分进行深入的研究。

§9.4 “内匀外纬-似水准椭球”与皮泽蒂椭球和杰弗里斯-布伦模型比较

第2章介绍了皮泽蒂椭球,由第7章和第8章可知,“地球纬向正常密度函数”和“地幔纬向正常密度函数”继承了皮泽蒂椭球表面密度的纬向分布形式。将皮泽蒂椭球与“内匀外纬-似水准椭球”相比,有以下相同点与不同点:

(1)皮泽蒂椭球与“内匀外纬-似水准椭球”,二者均为“双层结构”,都是内部为匀质椭球,外部为“纬向密度”分布。

(2)皮泽蒂椭球的内椭球太大,外层太薄,且为负密度,不符合地球的实际情况;“内匀外纬-似水准椭球”按照地核与壳幔混合体分为两层,密度界面设在核幔边界处,比较接近地球的实际情况。

(3)皮泽蒂椭球的表面满足“等位条件”,而“内匀外纬-似水准椭球”的表面仅仅满足极点和赤道的“准等位条件”;所以,皮泽蒂椭球是一种水准椭球,而“内匀外纬-似水准椭球”则是一种与水准椭球接近的“似水准椭球”。

“内匀外纬-似水准椭球”的内、外密度参考杰弗里斯-布伦模型^[22]取值求解。将杰弗里斯-布伦模型与“内匀外纬-似水准椭球”相比,有以下几点不同:

(1)杰弗里斯-布伦模型是由地震学的方法得到的,主要用于地震学的研究;而“内匀外纬-似水准椭球”是由地球重力学的方法得到的,主要用于地球重力学的研究。

(2)杰弗里斯-布伦模型分了几十层,适用于研究地球的内部结构;“内匀外纬-似水准椭球”是“双层结构”,适用于研究地球的整体物质运动。

(3)杰弗里斯-布伦模型是球型结构,不考虑表面的“等位条件”,表面重力与地球正常重力相去甚远,忽略了地球的几何特征和重力特征;“内匀外纬-似水准椭球”是椭球型结构,表面满足与“等位条件”近似的“准等位条件”,表面重力接近地球正常重力,满足了地球的几何特征和重力特征。

“内匀外纬-似水准椭球”吸取了皮泽蒂椭球符合地球几何特征和重力特征的优点,也吸取了杰弗里斯-布伦模型符合地核和壳幔分层的优点;但是,“内匀外纬-似水准椭球”只有两层而不是多层,且表面只是满足“准等位条件”而不是“等位条件”,这些都有待在进一步的研究中不断发展。

第 10 章 地球正常密度假说

CHAPTER 10 The Earth's Normal Density Hypothesis

Abstract: Austrian E. Suess published famous book, *The Face of the Earth*, in 1901. The concept of continental drift was put forward first time. E. Suess believed Africa, Antarctic and India was once a supercontinent called Gondwanaland. But, he seemed never found the power of continent drift even in his later years. So far, the dynamic problem of continental drift and plate motion has perplexed Geoscientists more than 100 years. Based on solving of latitudinal normal density function, we propose normal density hypothesis providing a new selection for research dynamic mechanism of plate motion.

1901年,奥地利的休斯(E. Suess)^[23]出版了名著《地球的面貌》,书中首次出现了大陆漂移的概念。休斯认为,非洲、南极洲和印度曾经是一个超级大陆,并称它为“冈瓦纳古大陆”(Gondwanaland)。但是,正如李四光先生所指出的那样:“休斯似乎没有能够,甚至在他的晚年,找出大陆漂移的动力”^[24]。迄今为止,大陆漂移及板块运动的动力问题已困扰了地学界达一百年之久,是地球科学的世纪之谜。

§ 10.1 地球正常密度概念

地球的“正常密度”概念是相对于地球重力学研究地球密度问题而言的,或者说,是为了地球重力学研究地球密度问题而建立的^[25]。在地球重力学中,有三个概念是大家都知道的,即:“重力异常”、“正常重力”以及“密度异常”。从逻辑上说,“重力异常”概念是由“正常重力”概念定义的,但“密度异常”这个概念却一直没有相应的“正常密度”概念来支撑;另外,“重力异常”概念与“密度异常”概念是相对应的,但与“正常重力”概念相对应的“正常密度”概念却一直没有确定;这就使得“地球的正常密度”在地球重力学中似乎是一个“缺失”的概念。著名地球物理学家布伦的著作《地球的密度》告诉人们地球的密度“是怎样的”(实际分布)^[26];而“地球的正常密度”则希望去告诉人们地球的密度“应该是怎样的”(理论分布)。“正常密度”概念将弥补地球重力学中“概念的缺失”,使“密度异常”概念获得理论支撑,并使“正常重力”概念与之对应。

实际上,“地球的正常密度”并不完全是新概念,在地球重力学中,“地球的正常重力”是水准椭球表面的重力,而“地球的正常密度”则对应水准椭球内部的密度分布。著名地球重力学家莫里茨指出^[16]:“大地测量学和地球物理学之间老的很清楚的分界线已经开始消失。1980大地参考系统采用等位椭球作为参照面,因此很自然地会提出这样一个问题,即这一椭球所相应的物质分布构形。类似地,也要求研究地球物质分布的异常,考虑重力场与地球内部的密度分布之间不可分割的联系”;“水准椭球内任何合理的物质分布是不知道的,但水准椭球的非均匀、非平衡的物质分布是一定存在的”;这就是说:“地球的正常密度”目前是不知道的,但“地球的正常密度”是一定存在的。

§ 10.2 地球正常密度假说的基本观点

地球重力学与大陆漂移假说在理论上有着非常密切的联系。1749年,法国的布格(P. Bouguer)根据对重力测量和垂线偏差的研究,发现安第斯山脉下面存在着一个质量亏损,山体的密度似乎只有地球平均密度的六分之一。这种现象在当时并未引起特别注意。一百年后,英国的额菲尔士(G. Everest)于1854年在靠近喜

马拉雅山的印度北部进行三角测量时,取得了由山体影响而导致垂线偏差的大量资料^[84]。英国的普拉特(J. H. Pratt)在整理这些垂线偏差的测量记录时发现,实测偏差大大小于理论计算偏差。这意味着山体及其下部存在着某种补偿作用,在一定程度上抵消了其高出地表那部分的影响。为了解释这种现象,普拉特和爱黎(G. B. Airy)于1855年左右创立了地球重力学中的著名理论——地壳均衡假说(isostatics)。不过“均衡”(isostasy)这个词是道顿(C. E. Dutton)后来于1889年创造的^[85]。地壳均衡假说认为,山脉是“漂浮”在地下深处一种密度较大的流体物质之上的。正是由于这一点,地壳均衡假说否定了“陆桥沉没”的观点,成为魏格纳(A. L. Wegener)建立大陆漂移假说的基础理论之一^[47]。

按照“纬向密度”概念和1980大地参考系统,第7章和第8章解算出“地球纬向正常密度函数”和“地幔纬向正常密度函数”,从数学上证明了赤道纬向正常密度小于极点纬向正常密度,进而提出“地球正常密度假说”^[83]。

“地球正常密度假说”认为:“地球正常密度”对整体地球来说是普遍适用的,地幔(含地壳)的正常密度是按“地幔正常密度函数” $\delta_e(B)$ 规则分布的;如果地幔的密度是正常分布的,其物质分布状态在水平方向就是稳定的;而如果地幔的密度是异常分布的,其物质分布状态在水平方向就是不稳定的,与 $\delta_e(B)$ 不符的“地幔密度异常” $\Delta\delta_e$ 就会引起水平方向的重力。“水平重力”总是把地幔物质从“地幔密度异常”($\Delta\delta_e > 0$)高的地区推向“地幔密度异常”($\Delta\delta_e < 0$)低的地区。在“水平重力”的驱动下,地幔物质沿水平方向发生迁移和调整,最终达到地幔物质平衡 $\Delta\delta_e = 0$ 。

§ 10.3 地幔水平重力模式

如果说板块运动的动力来自地幔的话,那么地球重力学对地幔的专门研究就显得十分重要了。建立“板块动力模型”的所要完成的根本任务,就是要得出板块所受驱动力的大小和方向。按照“正常密度假说”的基本观点:板块运动动力的方向由“地幔密度异常高”($\Delta\delta_e > 0$)地区的中心指向“地幔密度异常低”($\Delta\delta_e < 0$)地区的中心;而板块运动动力的大小,则可由下式确定。

$$F = k \frac{(\Delta\delta_e^+ a_+) (\Delta\delta_e^- a_-)}{r^2}$$

式中, $\Delta\delta_e^+$ 为“异常高”地区的平均异常值; a_+ 为“异常高”地区的面积; $\Delta\delta_e^-$ 为“异常低”地区的平均异常值; a_- 为“异常低”地区的面积; r 为“异常高”中心至“异常低”中心的距离; k 为待定常数。

为了给出“水平重力”的定义,先设地球表面的任一质点 P 和地球内部任意两质点 Q_1 和 Q_2 ,参见图10-1。

不难看出,在这种情况下, P 点共受到三个力,即 Q_1 对 P 的引力 q_1 、 Q_2

对 P 的引力 q_2 和 P 点的离心力 p 。再设 q_1 、 q_2 和 p 这三力的合力为 g ， g 的切向分量为 g_τ 、法向分量为 g_n ，显然， g_τ 就是 P 点所受到的“水平重力”（地球自引力和离心力的水平分量）。进一步分解，自引力的水平分量 g_τ 在经度方向的分量称为“经向重力”、在纬度方向的分量称为“纬向重力”。

将图 10-1 中的两个质点 Q_1 和 Q_2 推广为地球内的所有质点，我们就得到了地球表面一点 P 所受到的“经向重力”与“纬向重力”的定义。显然， P 点不仅可以处在地球表面，而且可以处在地球内部。

值得注意的是，有关专家提出了与“正常密度假说”相近似的观点^[27]：“重力是推动地壳运动的杠杆，重力既是垂直力，也能够转化成强大的水平力，很难找到可用于推动地壳构造运动的非重力派生的水平力，所有构造运动的方式都能在地球重力场的作用下发生”。

提出大陆漂移假说的魏格纳认为大陆漂移的动力是“离极力”。应该指出，水平重力与离极力是不同的。离极力是由于重力线的弯曲引起的，离极力总是把岩石圈推向赤道，离极力是永远存在的；水平重力是由 $\Delta\delta$ 引起的， $\Delta\delta > 0$ 意味着物质“多余”， $\Delta\delta < 0$ 意味着物质“不足”。全球物质对“多余物质”的引力加上“多余物质”所受离心力的合力，就是“多余物质”所受到的水平重力。水平重力总是把物质从 $\Delta\delta > 0$ 的地区推向 $\Delta\delta < 0$ 的地区而使得 $\Delta\delta = 0$ ，是一种地球物质平衡的“维持力”和“恢复力”。如果地球的整体密度处于正常分布状态 $\delta = \delta(B)$ ，那么 $\Delta\delta$ 也就处处为零，水平重力也就不存在了。

应该特别说明，纬向重力是在子午圈平面内产生的，是一种南北方向的重力。在平行圈平面内，正常密度假说认为，在同一纬度内，不同经度的正常密度处处相等，也就是说，“经向正常密度”是匀质分布的，其数值等于纬向正常密度函数在该纬度的密度值；与匀质密度不符的“经向密度异常”将会引起东西方向的“经向重力”，驱动物质运动，达到物质的匀质分布。实际上，相对于纬向正常密度（仅仅是纬度的函数）的密度异常包含了经度方向的密度异常。就像正常重力和重力异常的关系一样，正常重力仅仅是纬度的函数，而重力异常则不仅与纬度有关，而且与经度有关。

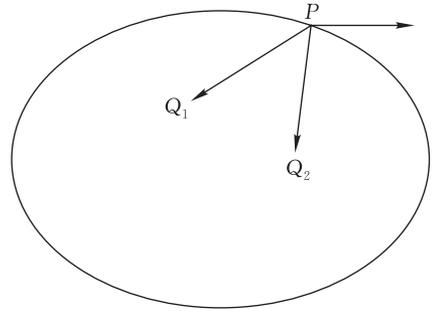


图 10-1 水平重力模式

§ 10.4 理想地幔的正常重力位

既然“正常密度假说”给自己规定的任务是“阐明板块运动的驱动机制”，那么我们就应该继续提问：为什么 $\Delta\delta_e > 0$ 的地区物质一定要流向 $\Delta\delta_e < 0$ 的地区

呢?是什么原因导致地幔的物质流动呢?

电位差(电压)导致电流,水位差导致水流。因此,地幔物质流动的原因,应该是地幔的“重力位差”,即“地幔重力位异常”。

在地球重力学中,“重力异常”是相对“正常重力”而言的,所以,“地幔重力位异常”也应该是相对“地幔正常重力位”而言的。也就是说,要想得到“地幔重力位异常”,必须先要得到“地幔正常重力位”。

根据地球重力学的基本理论,若将地壳并入地幔,则“地幔正常重力位”应等于“地球正常重力位”与“地核正常引力位”之差。

由物理大地测量学可知,地球正常重力位(水准椭球表面的重力位)为^[1]

$$U_0 = \frac{GM}{be'} \arctane' + \frac{\omega^2 a^2}{3} \quad (10-1)$$

参见第8章,在理想地幔模式中,地壳与地幔合并,地核为匀质椭球,地幔的密度按纬度分布,地幔正常密度函数为

$$\delta_c(B) = \sqrt{4.650852^2 \cos^2 B + 4.666229^2 \sin^2 B} \text{ g/cm}^3 \quad (10-2)$$

理想地幔模式中的地核匀质密度及地核椭球的长、短半径分别为

$$\delta_i = 9.968 \text{ g/cm}^3, a_i = na, b_i = nb, n = 0.544872 \quad (10-3)$$

注意,我们在第8章将式(10-2)称为“地幔纬向正常密度”,而在这里却将其称为“地幔正常密度”,其实,这两种叫法并没有区别。在地球重力学中,水准椭球为旋转椭球,地球的正常重力仅仅是纬度的函数,所以,地球正常重力函数也可称为地球纬向正常重力函数。同理,对于旋转椭球来说,地幔的正常密度也仅仅是纬度的函数,所以,“地幔纬向正常密度”也可以称为“地幔正常密度”。

由第5章可知,匀质地核椭球在地球椭球表面的引力位为

$$V_i = -\frac{1}{2}P_3(x_0^2 + y_0^2) - \frac{1}{2}Q_3z_0^2 + K_3 \quad (10-4)$$

式中

$$P_3 = 2\pi G\delta_i \frac{1+e'^2}{e'^3} \left(\arctane''_c - \frac{e''_c}{1+e''_c} \right), \quad Q_3 = 4\pi G\delta_i \frac{1+e'^2}{e'^3} (e''_c - \arctane''_c)$$

$$K_3 = 2\pi G\delta_i \frac{a^2}{e'} \arctane''_c, \quad e''_c = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2b^2+c}}, \quad e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$

$$c = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(n^2a^2 + n^2b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1-n^2)} - (n^2a^2 + n^2b^2 - \rho^2) \right]$$

$$\rho = [(a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B) / (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)]^{\frac{1}{2}}$$

由旋转椭球表面的几何关系可得

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^4 \cos^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}, \quad z_0^2 = \frac{b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}$$

代入式(10-4)可得

$$V_i = K_3 - \frac{P_3 a^4 \cos^2 B + Q_3 b^4 \sin^2 B}{2(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)} \quad (10-5)$$

以上就是匀质地核椭球在地球椭球表面的“地核正常引力位”。于是,由式(10-1)、式(10-5)可得理想地幔模式中“地幔正常重力位函数”为

$$U_e = U_0 - V_i = \frac{GM}{be'} \arctan e' + \frac{\omega^2 a^2}{3} + \frac{P_3 a^4 \cos^2 B + Q_3 b^4 \sin^2 B}{2(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)} - K_3 \quad (10-6)$$

“地幔正常重力位函数”为封闭的解析函数,常数 (a, b, GM, ω) 由1980大地参考系统给出,常数 δ_i 和 n 由式(10-3)给出, B 为地球椭球表面点的地理纬度。

“地幔正常重力位函数”使得采用“地幔重力位异常”对板块运动的驱动机制进行定量的研究,成为一种理论上的可能。按照地球重力学的传统,“异常=实际-正常”,而“地幔实际重力位”可以根据卫星重力资料并采用“场分离”的算法获得。

应该特别指出的是,这里的地幔正常重力位、实际重力位、重力位异常,指的是地幔物质在地球表面(而不是地球内部)的重力位效应。

§ 10.5 对钱氏极限的相关思考

1930年,年仅19岁的印度少年钱德拉塞卡(S. Chandrasekhar)在赶往剑桥大学去读研究生的轮船上,写出了一篇在科学史上占有重要地位的论文(钱德拉塞卡于1983年获得诺贝尔奖,部分原因就在于这篇论文),几经周折后发表在美国的《天体物理学杂志》上。在这篇论文中,他计算出“一个大约为太阳质量一倍半的冷恒星不能支持自身以抵抗自己的引力”^[28]。这个约一倍半的太阳质量,现在被称为“钱德拉塞卡质量极限”。如果一颗冷恒星的质量比“钱德拉塞卡质量极限”小,那么它最后会停止收缩并变为一颗半径为几千公里、密度为每立方厘米上百吨的“白矮星”。如果一颗冷恒星的质量比“钱德拉塞卡质量极限”大,那么它将无法支撑“自引力”的作用而最终坍缩成一点,变为“黑洞”。

“钱德拉塞卡质量极限”解决了一个重大的科学问题,然而,“黑洞在20世纪遇到广泛而且几乎普遍的抵制”。加拿大阿尔伯达大学的当代物理学家伊斯雷尔(W. Israel)写道:“黑洞的历史和大陆漂移的历史有着惊人的相似,两者的证据到1916年就已经不容忽视了,但两种思想都被一种近乎无理的阻力在半路上阻挡了半个世纪。”^[29]

伊斯雷尔“说者无意”地将黑洞与大陆漂移联系在一起,而我们下面将“听者有心”地将“钱德拉塞卡质量极限”与板块运动的地球重力学机制联系在一起^[30]。

“钱德拉塞卡质量极限”所涉及的问题是恒星的坍塌,我们的问题是地球的板块运动,从表面上来看,二者好像没有什么联系。但是,从本质上分析,“钱德拉塞卡质量极限”所涉及的是恒星的“质量”和“自引力”的问题,而本文给出的板块运动的动力学条件(地球重力学部分)之一,恰恰就是地球的“质量”和“自引力”的问题。

物体的质量越大,其自引力也就越大。既然大于“钱德拉塞卡质量极限”的冷恒星“不能支撑自引力的作用”,因而会产生坍塌。那么是否也有可能存在着一种“板块运动的质量极限”,如果地球的质量小于“板块运动的质量极限”,那么岩石圈板块将“能够支撑住纬向重力和经向重力的作用”而保持静止;而如果地球的质量大于“板块运动的质量极限”,那么岩石圈板块将“不能支撑住纬向重力和经向重力的作用”而产生运动。

“火星上的塔尔锡斯(Tharsis)高原比地球的青藏高原的高度高一倍、面积大七倍,但是,没有任何迹象表明火星上存在着像地球上那样大规模的板块运动”^[31]。火星的质量约为 6.42×10^{26} g,地球的质量约为 5.976×10^{27} g,前者仅为后者的约11%。相比之下,地球是大质量行星、自引力大、存在板块运动,火星是小质量行星、自引力小、不存在板块运动。所以,“板块运动的质量极限”的数值应在地球质量和火星质量之间,即应大于 6.42×10^{26} g、小于 5.976×10^{27} g。

一些同行专家在与作者研讨时曾提出这样的看法,自引力的效应肯定是有的,但这种效应是否太小,不足以克服板块运动的摩擦力或阻力。曾与惠勒(J. Wheeler)合写名著《引力》的美国加利福尼亚理工学院费曼物理学教授索恩(Kip S. Thorne)的观点应该能够打消这种顾虑,他写道:“即使我们认为在所有力中最强的核力也顶不住引力的挤压。”^[29]实际上,只要质量足够大,自引力是一种不可阻挡的力量,且不说“小小的”板块运动阻力,它甚至能够克服“所有力中最强的核力”而打破原子核,把一颗冷恒星“挤压”成一颗半径只有十几公里、密度为每立方厘米上亿吨的“中子星”^[28]。

第 11 章 板块运动重力学机制

CHAPTER 11 Gravity Mechanism of Plate Movement

Abstract: The observation and research on plate movement model has been taken great progress. But contrasting to it obviously, the plate geodynamics model has not obtained material progress. It is widely accepted by most geoscientists that the most possible force of plate movement is mantle convection. The cause of mantle mass flow has not yet been investigated, so the plate tectonics is still located on the stage of “plate movement model”, not come into the stage of “plate dynamical model”. Based on normal density hypothesis, this chapter puts forward the gravity mechanism of plate movement, and gives the concept of “movement plate” and “dynamical plate”.

关于“板块运动模型”的测量与研究已经取得丰硕成果。然而,与之形成鲜明对照的是,关于“板块动力模型”的测量与研究却还没有取得实质性的进展。板块运动最有可能的动力是地幔对流,这一点已为大多数地球科学家所共识。但由于地幔物质流动的成因至今尚未查明,所以板块构造学说研究仍处于“板块运动模型”阶段,而没有进入“板块动力模型”阶段^[32]。

§11.1 板块运动模型

建立“板块运动模型”的方法有两种:一种是“地质与地球物理方法”,另一种是“空间大地测量方法”。“地质与地球物理方法”的观测内容有两项,一是板块相对运动的速度,计有瓦因-马修斯法、地形法、布龙法和贝尼奥夫带长度法等;二是板块相对运动的方向,其主要观测量为地震滑动矢量和转换断层方位角。“空间大地测量方法”的观测内容也是两项,一是位于不同板块上的测站间的基线变化,二是测站地心坐标的变化;前者可以用来求解板块相对运动参数,后者可以用来求解板块绝对运动参数。“空间大地测量方法”的观测手段为 VLBI、SLR 和 GPS 等^[33]。

用“地质与地球物理方法”建立板块运动模型,最早是由勒皮松(Le Pichon)于1968年提出来的^[34],所建立的板块运动模型为 LP 68。此后,随着观测资料的积累和研究工作的深入,蔡斯(Chase)于1972年和1978年先后建立了板块运动模型 CH 72 和 P 071^[35],明斯特(J. B. Minster)和约尔旦(T. H. Jordon)先后于1974年和1978年建立了板块运动模型 RM 1 和 RM 2^[36],德梅茨(C. DeMets)和戈登(Gordon)于1990年和1994年建立了板块运动模型 NUVEL-1 和 NUVEL-1A^[37]。

1980年代初,德鲁斯(Drewes)导出了由测站坐标变化和弧长变化求解板块运动参数的数学公式,并于1986年利用当时有限的实测资料估算了北美与澳大利亚板块的相对运动参数,又分别用 VLBI 和 SLR 资料求解出北美、欧亚、太平洋和澳大利亚板块的绝对运动参数^[38]。随着测站的增加和观测时间的积累,这项研究得到了发展。阿尔戈斯(Argus)和戈登利用1984~1987年的 VLBI 观测数据,解算了北美与太平洋板块的相对运动参数^[39]。我国专家利用1979~1991年50个 VLBI 站的175条基线变化^[40],解算出欧亚、北美和太平洋板块的相对运动参数;利用1980~1991年40多个站的 SLR 观测数据,解算出欧亚、北美、太平洋、南美和澳大利亚板块的相对欧拉矢量。随着 GPS 观测技术的发展,阿尔戈斯和赫夫林(Heflin)利用4年的 GPS 观测结果建立了全球6大主要板块的运动模型^[41],拉尔森(Larson)利用5年 GPS 观测资料建立了8个主要板块的运动模型^[42],佐藤(Sato)利用34个 GPS 站的558条基线变化建立了5个主要板块的运动模型^[43],德鲁斯(Drewes)联合利用 GPS、VLBI 和 SLR 资料建立了12个板块的运动模型。

最新的研究工作是根据 ITRF 96 和 ITRF 97 的结果研究板块运动模型,西拉德(Sillard)用 ITRF 96 速度场建立了 8 个主要板块的运动模型^[44],我国专家也得出了相应的研究成果^[45]。

§ 11.2 从大陆漂移假说到板块构造学说的发展

1910 年,美国的泰勒(F. B. Taylor)指出^[46],由于欧洲与亚洲一起向南蠕动,因而在第三纪掀起了横跨欧亚的山脉带。泰勒认为,在白垩纪时期月球被地球所捕获,而且最初离地球要比现在近得多,潮汐力使地球的转速陡然增大,地球的高速旋转使大陆从极区滑向赤道。这个动力理论遇到的问题,如果造山作用同白垩纪地球捕获月球关联的话,那么早于第三纪的造山运动就得不到解释。而且强大到足以移动大陆的潮汐力,必然会在很短的时间内使地球的旋转减慢到几乎停止。

1915 年,德国的魏格纳出版了名著《大陆和海洋的形成》^[47],提出了轰动学界的大陆漂移假说。魏格纳认为,距今约两亿年前,冈瓦纳大陆与亚洲以及北美洲曾经是一个联合古陆(Pangaea),后来由于“离极力”(Pole Fleeing Force)的作用而分裂开来。离极力的概念首先是匈牙利的厄特弗斯(R. von Eötvös)于 1912 年提出来的^[48]。对于椭圆形的地球来说,在子午面内看到的重力线是弯曲的,两极位于弯曲的凹侧。由于漂浮物质的重心高于被排开的下层物质的重心,重力线的弯曲使得重力和浮力不能相抵消,因而有一个指向赤道的合力。爱泼斯坦(P. S. Epstein)^[49]、朗伯(W. D. Lambert)^[50]、厄特尔(H. Ertel)^[51]以及大陆漂移假说反对派的代表人物英国的杰弗里斯(H. Jeffreys)^[21]的研究表明,尽管离极力是存在的,但它的量级很小,难以克服大陆漂移的摩擦阻力。普瑞(A. Prey)甚至对离极力的真实性提出了质疑^[52]。而魏格纳却认为,离极力的量级虽不大,但持续数百万年就会使大陆漂移。把离极力解释成大陆漂移的动力的理论,使得大陆漂移假说在魏格纳 1930 年去世后不久便遭受到严重挫折。

大陆漂移假说在海洋中得到了复兴。1889 年,英国的奥尔德利奇(P. Aldrich)在太平洋中发现了海沟^[58]。1923 年,荷兰的韦宁·迈内兹(F. A. Vening Meinesz)开始在海上进行重力测量,并发现在海沟处具有较大的重力负异常。这意味着有某种力在保持着地球表面的不规则形状,以阻止其变平的自然倾向。韦宁·迈内兹认为这种力与地幔的热对流有一定的关系^[59~60]。在此基础上,英国爱丁堡大学的霍姆斯(A. Holmes)于 1928 年提出了地幔对流假说^[61]。霍姆斯认为,当地幔对流体上升到大陆中央并向两侧散开时,大陆就会裂开形成海洋。当地幔对流体经长距离迁移逐渐冷却加重后,就会下沉回到地幔深处,并将海底向下牵引形成海沟。可惜地幔对流假说在当时没有引起人们的注意。甚至连霍姆斯本人也认为,这种为适应特别需要而虚构的推测,在得到独立的证据支持之前是没有科学价值的^[62]。

1885年,英国的莫里(M. F. Maury)在北大西洋中发现了洋中脊^[63]。1956年,美国哥伦比亚大学的尤因(M. Ewing)和希曾(B. C. Heezen)发现了贯穿全世界大洋的洋中脊体系^[64]。1954年,英国剑桥大学的布拉德开始在海上进行海底热流测量^[65]。1960年的海底热流测量结果表明,洋中脊处的热流值高出海沟处的热流值达20倍之多^[66]。这意味着地幔对流有可能在洋中脊处上升而在海沟处下降,使得地幔对流假说在提出30年后得到了证实。

1961年,迪茨(R. S. Dietz)第一次引入了“海底扩张”这一名词^[67]。1962年,美国普林斯顿大学的赫斯(H. H. Hess)以地幔对流假说为桥梁,在一篇著名的论文(《海底的历史》)中把大陆漂移假说发展成海底扩张假说^[68]。赫斯认为,洋中脊是地幔对流物质的出口,海底由此诞生并向两侧扩张传送,到达海沟后又重新沉入地幔中,全过程需要二亿至三亿年。在赫斯发表海底扩张假说之前,美国加利福尼亚大学的瓦奎尔(V. Vacquier)于1959年发现在北美西部的太平洋底呈现一种规则条带状的地磁异常图形^[69]。1963年,布拉德的学生瓦因(F. J. Vine)和马修斯(D. H. Matthews)针对瓦奎尔的发现提出了一个让人简直不敢相信的科学见解^[70],由于地磁方向在地质历史上发生周期性地倒转^[71],正负相间的海底地磁异常图形正是地球磁场周期性转向时海底离开洋中脊而扩张的结果,从而令人信服地证实了海底扩张假说。

1914年,美国的巴雷尔(J. Barrell)提出了岩石圈和软流圈的概念^[72]。1926年,德国的古登堡(B. Gutenberg)发现地震波在通过地下100 km~200 km深度时速度不但没有增加反而减慢了,到达250 km深度时波速才又上升。因此他认为,在地下大约60~250 km的深度之间存在着一个塑性的软流圈^[73]。古登堡的发现在当时被认为是局部现象而没有引起重视。与地幔对流假说的命运相同,三十年后的1960年5月22日,智利发生了8.9级大地震,对这次地震记录所进行的分析和计算为软流圈的存在提供了决定性的证据^[74]。

软流圈的发现使得大陆漂移、地幔对流和海底扩张的思想显得更加合理了。1968年前后,麦肯齐(D. P. McKenzie)、派克(R. L. Parker)、摩根(W. J. Morgan)和勒皮松(X. Le Pichon)等人将岩石圈划分为六个板块,并且建立起了板块之间的运动模式。于是,被誉为地球科学革命的板块构造学说终于在海底扩张假说的基础上诞生了^[75~77]。板块构造学说认为,地质构造形成的原因是刚性板块的相互作用,板块在垂直方向上包括整个岩石圈的厚度约100 km,在水平方向上沿软流圈或连同软流圈一起迁移,板块运动的动力就是发生在软流圈中的地幔对流。

虽然地幔对流假说在大陆漂移假说发展成海底扩张假说以及最后形成板块构造学说的过程中,起到了重要的桥梁作用,但地幔对流假说至今还没有解决板块运动的动力问题。如果说是地幔对流驱动了板块运动,那么又是什么力量使地幔发生对流呢?

1970 年代初,摩根和威尔逊(J. T. Wilson)先后提出地幔中存在有一系列热点(hot spot)和地幔柱(mantle plume)的推测^[78-79]。他们认为,在下地幔有物质衰变生热形成热点,热力使物质熔化膨胀,构成一股热流向地表上升形成地幔柱,上升的热流到达岩石圈底部并向外围扩散,然后逐渐冷却变重下沉形成对流。连成一线的热点则形成一条海底扩张带。但是这个理论遇到的问题,现在知道的热点不一定都在海底扩张带上,而在很长的一段扩张带上也不一定有热点^[80]。

目前,板块构造学说仍处于定性讨论阶段,还有一些根本问题没有解决,如板块构造的形成机制和演变规律以及板块运动的动力问题等。在这些尚未解决的根本问题中,动力问题是根本中的根本。只要动力问题能得到解决,板块构造的形成机制和演变规律等问题也就有可能会迎刃而解。在过去的一个世纪里,地幔对流假说完成了大陆漂移假说与板块构造学说之间桥梁作用。在新世纪的开端,板块运动的动力问题——这个地球科学的世纪之谜,正在以挑战者的姿态呼唤着新理论的诞生。

§ 11.3 板块运动重力学机制的基本观点

实际上,岩石圈板块不仅发生水平运动引起“大陆漂移”,而且也发生垂直运动引起山脉的隆起与盆地的沉陷。也就是说,板块运动的动力并不仅仅是一个二维的平面矢量。

有些地质学家认为,山脉褶皱是由于地壳的水平运动挤压所产生的,构造运动的动力是水平力^[86]。但另一些地质学家认为,山脉隆起是由于地壳的垂直运动所产生的,构造运动的动力是垂直力^[118]。在海洋里,构造运动的主要特征是海底扩张,因此可认为海洋构造运动的主要动力是水平力。在大陆上,构造运动的主要特征是山脉的隆起和盆地的沉陷,因此可认为大陆构造运动的主要动力是垂直力。迄今为止,还没有一种动力理论能够同时解释海洋和大陆不同类型的构造运动。^[119]以青藏高原为例,目前的观点是印度板块和欧亚板块碰撞导致青藏高原的隆起,板块碰撞的边界在雅鲁藏布江断裂带一线,板块碰撞的原因是印度板块向北俯冲^[120]。但是从全球板块的分布状况来看,印度洋的洋中脊似乎难以提供驱动印度板块向北运动的动力。况且,简单地用俯冲和碰撞的观点也无法解释远离碰撞边界的天山和阿尔泰山系的隆起和塔里木盆地的巨大沉陷。

根据“地球正常密度假说”,“板块运动重力学机制”的基本观点认为^[83]:岩石圈板块的水平运动与垂直运动是一种辩证关系。一方面,“水平重力”驱动岩石圈沿水平方向由 $\Delta\delta_c > 0$ 的地区向 $\Delta\delta_c < 0$ 的地区运动,造成大陆漂移和板块运动。另一方面,因“水平重力”驱动软流圈物质沿水平方向运动而使得岩石圈沿垂直方向发生运动; $\Delta\delta_c > 0$ 地区的岩石圈会因为软流圈物质的流出而下沉造成盆地沉陷(见图 11-1), $\Delta\delta_c < 0$ 地区的岩石圈会因为软流圈物质的流入而上升造成山脉

隆升(见图 11-2)。

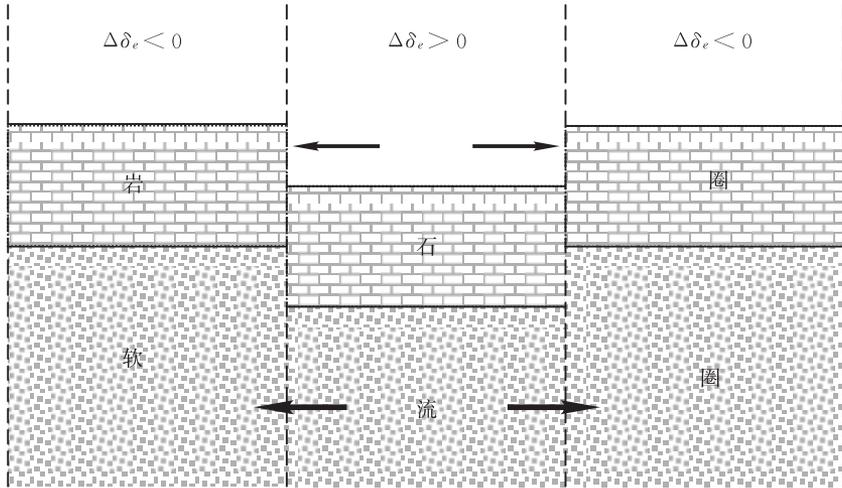


图 11-1 盆地沉陷

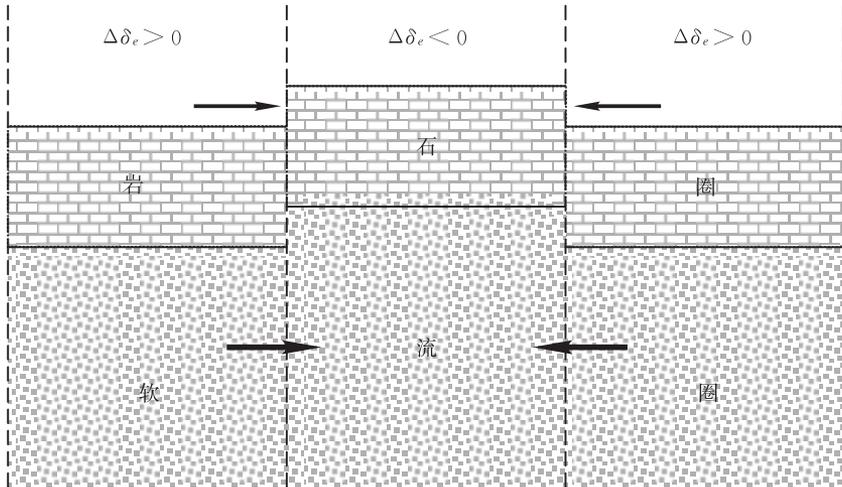


图 11-2 山脉隆升

“地幔水平重力模式”和“板块运动重力学机制”定性地给出了建立“板块动力模型”的地球重力学方法,这种方法由“定性”转化为“定量”的前提,是求解“地幔密度异常” $\Delta\delta_e$ 。在地球重力学中,“重力异常”是相对“正常重力”而言的,所以,“地幔密度异常” $\Delta\delta_e$ 也应该是相对“地幔纬向正常密度” $\delta_e(B)$ 而言的。如果能够得到“地幔实际密度”,便可由“‘异常’=‘实际’-‘正常’”的关系,得到地幔密度异常 $\Delta\delta_e$ 。

在印度洋、印度次大陆和中亚等地均存在着大型的低密度中心,这些低密度中

心与 $\Delta\delta$ 的关系及其动力学含义值得深入研究。让我们应用“板块运动重力学机制”和地幔对流假说互为补充地来解释青藏高原的大陆构造运动,以便最终了解大陆岩石圈物质的增生与消减过程。

§11.4 盆山耦合现象

李四光先生在探讨地槽沉降运动的起因时指出^[86]:“我们不得不问,那个槽子底下的物质哪里去了?如果我们否定槽子底下的物质向侧面迁移,以致在它的侧面形成隆起地带,我们就无法答复上面提出的问题。”

克鲁泡特金在探讨岛弧和海沟区的重力异常时指出^[87]:“这种变化可能与壳下基底中物质水平方向上的流出与流入有关,或者至少可能与基底的致密情况有关。长期的垂直运动是由于深部物质的水平运动而产生。”

梁元博在讨论岛弧和深海沟共轭体系的成因时指出^[88]:“海沟区地壳下面有部分物质被抽出,加添到岛弧区地壳下面,这种过程使得岛弧隆起和海沟相应下降。”

白文吉在研究盆地和山脉的成因时指出^[89]:“盆地区上地幔相对隆升、山脉区上地幔相对沉降,盆地区被抬升和加热的下地壳物质向山脉下地壳方向蠕动。从盆地地下地壳抽出的物质填充到山根部位,迫使山脉隆升,而盆地沉降,两者同步进行,形成盆山运动。”

可见,地质学家们已经意识到发生在深部的这种物质侧向迁移运动存在的必要性,以上论断表明了以下观点:地壳物质的垂直运动是由于地幔物质的水平运动造成的;山脉和盆地(或岛弧和海沟)是共轭诞生的,山脉(或岛弧)的隆起,是由于盆地(或海沟)的沉降引起的;山脉(或岛弧)隆起的成因是由于该地区地幔物质的流进造成的,而盆地(或海沟)沉降的成因是由于该地区地幔物质的流出造成的。以上观点将盆地与山脉(或海沟与岛弧)的演化过程描述成一种此消彼长的互动关系,这就是地质学中的“盆山耦合现象”。

虽然“盆山耦合现象”还没有阐明板块运动的驱动机制,然而,“尽管地质学家们没有进一步指出这种物质运动的驱动力,但是,指出地质实践要求存在这类形式的物质运动本身,就为进一步的探索指出了方向”^[27]。

不难看出,正常密度假说及板块运动重力学机制与盆山耦合现象有着惊人的共同点,李四光等地质学家的观点在图 11-1 和图 11-2 中得到了完美的体现。

所不同的是,盆山耦合现象只是指出了盆山共轭的现象,而正常密度假说及板块运动重力学机制则试图阐明盆山共轭现象的成因和板块运动的驱动原理。克鲁泡特金的猜测是:盆山共轭现象“可能与壳下基底中物质水平方向上的流入和流出有关,或者至少可能与基底的致密情况有关”;而板块运动重力学机制则明确表

达地幔物质流动与地幔物质密度的关系： $\Delta\delta_e > 0$ 地区的岩石圈会因为软流圈物质的流出而下沉造成盆地沉陷， $\Delta\delta_e < 0$ 地区的岩石圈会因为软流圈物质的流入而上升造成山脉隆升。

如果把天山-阿尔泰山的隆起和塔里木盆地的沉陷看成是“盆山耦合现象”中的一对地质单元，那么，应用“正常密度假说”及其派生的理论与方法，也许就能定量地了解这对地质单元在演化过程中此消彼长的互动关系。

§11.5 软流圈板块概念

目前，板块的概念指的是岩石圈板块、是一种“运动板块”。根据地幔对流假说的基本观点，岩石圈板块运动的动力存在于软流圈中。根据“正常密度假说”和“板块运动重力机制”的基本观点，一方面，密度异常高地区的岩石圈板块会向密度异常低的地区进行俯冲，另一方面，软流圈中的动力则是由于地幔密度异常及其重力位异常造成的，而近年来我国学者的研究也表明了地幔密度异常驱动地幔物质流动的观点^[90-93]。

如果地幔密度异常真是驱动地幔物质流动的成因，那么就有可能在“正常密度假说”的理论框架下建立全球的地幔密度异常驱动模式。

如果驱动地幔物质流动的动力是地幔密度异常的话，那么软流圈中就有可能存在着动力特性不同的区域，区域的边界可以按照地幔密度异常的正、负值域来进行划分。不妨把这种按照动力特性划分的软流圈区域称为“软流圈板块”，“软流圈板块”的特性应该有两种，地幔密度正异常代表物质多余、区域内的物质要向区域外移动、可称为“张力板块”，地幔密度负异常代表物质亏损、区域外的物质要向区域内移动、可称为“引力板块”。也就是说，“软流圈板块”可按照力学性质分为两类： $\Delta\delta_e > 0$ 的地区 ($\Delta U_e > 0$ 的地区) 的物质总是要被推向 $\Delta\delta_e < 0$ 的地区 ($\Delta U_e < 0$ 的地区)，最终达到 $\Delta\delta_e = 0$ ($\Delta U_e = 0$)。所以， $\Delta U_e > 0$ 的“软流圈板块”可称为“张力板块”， $\Delta U_e < 0$ 的“软流圈板块”可称为“引力板块”^[94]。

第 12 章 重力微分公式

CHAPTER 12 Formula of Gravity Differential Coefficient

Abstract: Because the vertical average density under earth can not measured directly, the latitudinal density is not a direct measurement. It is an indirect quantity. However, in geodesy, geoid is also an indirect quantity that calculated by observed gravity. The Bruns formula used to solve geoid is founded by H. Bruns, a Germanic astronomer in 1878. In chapter 8, the normal density function has been given. By means of parameter ellipsoid theory, this chapter derives the mathematical formula of mantle density anomaly from earth gravity; try to make plate geodynamics research become quantitative research.

第3章推导了带密度参数和深度参数的重力封闭公式,提出了“参数椭球”的概念。由于参数椭球的重力公式中含有密度参数和深度参数,这就使我们能够根据参数椭球的重力公式推导出相对于密度参数和深度参数的“重力微分公式”,并由此研究建立应用参数椭球理论求解地球的密度异常和界面深度异常的地球重力学方法。

按照地幔对流假说和“正常密度假说”的观点,如果说板块运动的动力来自地幔的话,那么地球重力学对“地幔密度异常”的专门研究就显得十分重要了。但是,由纬向密度定义可知,“地球纬向密度”是某纬度“地表至地心向径的垂直平均密度”,“地幔纬向密度”是某纬度“壳幔边界至核幔边界向径的垂直平均密度”。由于地表以下的“垂直平均密度”无法直接测量,所以纬向密度不是一个“直接量”,而是一个“间接量”。然而,在大地测量学中,大地水准面也是一个无法直接测量的“间接量”,大地水准面异常是由可直接测量的重力间接解算出来的。重力求解大地水准面异常的“布隆斯公式”是由德国的天文学家布隆斯(H. Bruns)于1878年建立的。第8章求解出了地幔纬向正常密度函数,本章以参数椭球理论为工具,推导出重力求解地幔密度异常的数学公式,力图使得板块运动动力问题的定量研究成为可能。

§12.1 相对于深度参数的微分公式

参数椭球的外、内椭球面方程分别为

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}, \quad \rho_n^2 = \frac{a_n^2 b_n^2}{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}$$

设参数椭球的外椭球面到内椭球面的距离 D_n 为 δ_i 与 δ_e 之间的密度界面的深度,则

$$D_n = \rho - \rho_n = \rho(1 - n) \quad (12-1)$$

将式(4-1)对 D_n 求微分得

$$\frac{\partial g}{\partial D_n} = \frac{(P - \omega^2) a^4 \cos^2 B \frac{\partial P}{\partial D_n} + Q b^4 \sin^2 B \frac{\partial Q}{\partial D_n}}{g(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)} \quad (12-2)$$

由式(4-2)、式(4-3)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial D_n} &= 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} (\delta_i - \delta_e) \frac{\partial}{\partial D_n} \left(\arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''_c} \right) + \\ &2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} \left(\arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''_c} \right) \frac{\partial}{\partial D_n} (\delta_i - \delta_e) \quad (12-3) \\ \frac{\partial Q}{\partial D_n} &= 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3} (\delta_i - \delta_e) \frac{\partial}{\partial D_n} (e''_c - \arctan e''_c) + \end{aligned}$$

$$4\pi G \frac{1+e'^2}{e'^3} (e''_c - \arctane''_c) \frac{\partial}{\partial D_n} (\delta_i - \delta_e) \quad (12-4)$$

由式(4-5)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial D_n} \left(\arctane''_c - \frac{e''_c}{1+e''_c} \right) &= \frac{2e''_c}{(1+e''_c)^2} \frac{\partial e''_c}{\partial D_n} \\ \frac{\partial}{\partial D_n} (e''_c - \arctan e''_c) &= \frac{e''_c}{1+e''_c} \frac{\partial e''_c}{\partial D_n} \\ \frac{\partial e''_c}{\partial D_n} &= \frac{\partial e''_c}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial D_n} + \frac{\partial e''_c}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial D_n} \\ 2e''_c \frac{\partial e''_c}{\partial D_n} &= \frac{2ncb^2e'^2}{(n^2b^2+c)^2} \frac{\partial n}{\partial D_n} - \frac{n^2b^2e'^2}{(n^2b^2+c)^2} \frac{\partial n}{\partial D_n} \end{aligned}$$

由式(12-1)得

$$n = 1 - \frac{D_n}{\rho}, \quad \frac{D_n}{\partial D_n} = -\frac{1}{\rho}$$

因 $\frac{\partial c}{\partial D_n} = \frac{\partial c}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial D_n}$, 故由式(4-4)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial n} &= \frac{n[(n^2a^2 + n^2b^2 - \rho^2)(a^2 + b^2) + 2a^2b^2(1 - 2n^2)]}{\sqrt{(n^2a^2 + n^2b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2a^2b^2}} - n(a^2 + b^2) \\ \frac{\partial c}{\partial D_n} &= \frac{\partial c}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial D_n} = \frac{2n[c(a^2 + b^2) - a^2b^2(1 - 2n^2)]}{\rho(2c + n^2a^2 + n^2b^2 - \rho^2)} \end{aligned}$$

由式(4-23)得

$$\frac{\partial}{\partial D_n} (\delta_i - \delta_e) = -\frac{3}{n^4} (\delta_0 - \delta_e) \frac{\partial n}{\partial D_n} = \frac{3}{\rho n^4} (\delta_0 - \delta_e)$$

于是式(12-3)和式(12-4)变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial D_n} &= 2\pi G \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{1}{n^3} (\delta_0 - \delta_e) \frac{2e''_c}{(1+e''_c)} \frac{\partial e''_c}{\partial D_n} + \\ &2\pi G \frac{1+e'^2}{e'^3} \left(\arctane''_c - \frac{e''_c}{1+e''_c} \right) \frac{3}{\rho n^4} (\delta_0 - \delta_e) = \\ &2\pi G (\delta_0 - \delta_e) \frac{1+e'^2}{e'^3 n^3} \frac{2e''_c}{(1+e''_c)} (e''_c \frac{\partial e''_c}{\partial D_n}) + \\ &2\pi G (\delta_0 - \delta_e) \frac{1+e'^2}{e'^3 n^3} \frac{3}{\rho} \left(\arctane''_c - \frac{e''_c}{1+e''_c} \right) \quad (12-5) \\ \frac{\partial Q}{\partial D_n} &= 4\pi G \frac{1+e'^2}{e'^3} \frac{1}{n^3} (\delta_0 - \delta_e) \frac{e''_c}{(1+e''_c)} \frac{\partial e''_c}{\partial D_n} + \\ &4\pi G \frac{1+e'^2}{e'^3} (e''_c - \arctane''_c) \frac{3}{\rho n^4} (\delta_0 - \delta_e) = \end{aligned}$$

$$4\pi G(\delta_0 - \delta_e) \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} \frac{e''_c}{(1 + e''^2_c)} \left(e''_c \frac{\partial e''_c}{\partial D_n} \right) +$$

$$4\pi G(\delta_0 - \delta_e) \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} \frac{3}{n\rho} (e''_c - \arctan e''_c) \quad (12-6)$$

在式(12-5)和式(12-6)中

$$e''_c \frac{\partial e''_c}{\partial D_n} = - \frac{nb^2 e'^2}{\rho(n^2 b^2 - c^2)} \frac{2c^2 + 2cn^2(a^2 + b^2) - c\rho^2 - n^2 a^2 b^2(1 - 2n^2)}{2c + n^2(a^2 + b^2) - \rho^2}$$

将式(4-1)代入式(12-2)得

$$\frac{\partial g}{\partial D_n} = \frac{(P - \omega^2)a^4 \cos^2 B \frac{\partial P}{\partial D_n} + Qb^4 \sin^2 B \frac{\partial Q}{\partial D_n}}{\sqrt{[(P - \omega^2)^2 a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B](a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)}} \quad (12-7)$$

式中 P, Q 由式(4-2)和式(4-3)给出; $\frac{\partial P}{\partial D_n}, \frac{\partial Q}{\partial D_n}$ 由式(12-5)和式(12-6)给出。将式(12-7)中的 ∂g 和 ∂D_n 改写为 Δg 和 ΔD_n , 则

$$\Delta D_n = \frac{\sqrt{[(P - \omega^2)^2 a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B](a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)}}{(P - \omega^2)a^4 \cos^2 B \frac{\partial P}{\partial D_n} + Qb^4 \sin^2 B \frac{\partial Q}{\partial D_n}} \Delta g \quad (12-8)$$

上式即为参数椭球相对于深度参数的重力微分公式, 式中 ΔD_n 为相对密度界面平均深度 D_n 的界面起伏, Δg 为参数椭球表面重力沿纬度方向的差分。

§12.2 相对于密度参数的微分公式

将式(4-1)对密度参数 δ_e 求微分得

$$\frac{\partial g}{\partial \delta_e} = \frac{(P - \omega^2)a^4 \cos^2 B \frac{\partial P}{\partial \delta_e} + Qb^4 \sin^2 B \frac{\partial Q}{\partial \delta_e}}{g(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)} \quad (12-9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \delta_e} = 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} \left[n^3 \left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right) - \left(\arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''^2_c} \right) \right] \quad (12-10)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta_e} = 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3} [n^3(e' - \arctan e') - (e''_c - \arctan e''_c)] \quad (12-11)$$

将 ∂g 和 $\partial \delta_e$ 改写为 Δg 和 $\Delta \delta_e$, 则将式(12-10)和式(12-11)代入式(12-9)可得

$$\Delta \delta_e = \frac{\sqrt{[(P - \omega^2)^2 a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B](a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)}}{(P - \omega^2)a^4 \cos^2 B \frac{\partial P}{\partial \delta_e} + Qb^4 \sin^2 B \frac{\partial Q}{\partial \delta_e}} \Delta g \quad (12-12)$$

由式(4-24)可知

$$d\delta_i = \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)d\delta_e$$

所以

$$\Delta\delta_i = \frac{\sqrt{[(P - \omega^2)^2 a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B](a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)}}{(P - \omega^2) a^4 \cos^2 B \frac{\partial P}{\partial \delta_e} + Q b^4 \sin^2 B \frac{\partial Q}{\partial \delta_e}} \left(\frac{n^3 - 1}{n^3}\right) \Delta g \quad (12-13)$$

式(12-12)和式(12-13)即为参数椭球相对于密度参数的重力微分公式,式中 $\Delta\delta_e$ 和 $\Delta\delta_i$ 为相对于参数椭球的外密度 δ_e 和内密度 δ_i 的变化。

式(12-8)和式(12-12)及式(12-13)对于应用重力资料求解地球内部密度界面和地球内部密度异常有一定的参考意义。 Δg 为参数椭球表面两点的重力之差。对于求解地球内部密度界面来说,由于所求界面的平均深度 D_n 是由参数椭球的密度参数 δ_e 和界面深度参数 n 定义的,所以 Δg 与界面起伏 ΔD_n 是完全对应的,故无须像传统重力反演方法那样在事前进行“场分离”。对于求解地球内部密度异常来说, $\Delta\delta_e$ 或 $\Delta\delta_i$ 是地球内部密度的平均异常,是相对于地球内部的平均密度而言的。

§ 12.3 相对于地幔密度异常的微分公式

因地核为匀质椭球,则地幔纬向正常密度在地表引起的重力理论值为

$$g_e = \gamma_0 - \nu_i, \quad \gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (12-14)$$

式中, γ_0 为水准椭球的正常重力; γ_e 与 γ_p 分别为水准椭球赤道与极点的重力值; ν_i 为匀质地核椭球的引力。由第3章可知

$$\nu_i = [(P_3^2 a^4 \cos^2 B + Q_3^2 b^4 \sin^2 B) / (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)]^{\frac{1}{2}} \quad (12-15)$$

$$P_3 = 2\pi G\delta_i \frac{1 + e_n'^2}{e_n'^3} \left(\arctan e_c'' - \frac{e_c''}{1 + e_c''^2} \right), \quad Q_3 = 4\pi G\delta_i \frac{1 + e_n'^2}{e_n'^3} (e_c'' - \arctan e_c'') \quad (12-16)$$

$$2c = \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2) \quad (12-17)$$

$$e_c'' = \frac{b_n e_n'}{\sqrt{b_n^2 + c}}, \quad \rho^2 = \frac{(a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B)}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)} \quad (12-18)$$

式中, G 为万有引力常数; $n = 0.544872$; $\delta_i = 9.968$ 。

设 $d\delta_e$ 为地幔纬向正常密度沿纬度方向的微分, dg_e 为 $d\delta_e$ 引起的重力变化,则

$$dg_e = \frac{dg_e}{d\delta_e} d\delta_e, \quad \frac{dg_e}{d\delta_e} = \frac{\partial g_e}{\partial B} / \frac{\partial \delta_e}{\partial B} \quad (12-19)$$

由式(8-7)可得

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial B} = \frac{\cos B \sin B (\delta'_P{}^2 - \delta'_E{}^2)}{\sqrt{\delta'_E{}^2 \cos^2 B + \delta'_P{}^2 \sin^2 B}} \quad (12-20)$$

由式(12-14)可得

$$\frac{\partial g_e}{\partial B} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial B} - \frac{\partial \nu_i}{\partial B} \quad (12-21)$$

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial B} = \frac{2 \sin B \cos B (b \gamma_p - a \gamma_e)}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} - \frac{\gamma_0 \sin B \cos B (b^2 - a^2)}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} \quad (12-22)$$

由式(12-15)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_i}{\partial B} &= \frac{\cos B \sin B (Q_3^2 b^4 - P_3^2 a^4 - \nu_i^2 b^2 + \nu_i^2 a^2)}{\nu_i (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)} + \\ &\quad \frac{Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial B} b^4 \sin^2 B + P_3 \frac{\partial P_3}{\partial B} a^4 \cos^2 B}{\nu_i (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)} \end{aligned} \quad (12-23)$$

由式(12-16)可得

$$\frac{\partial P_3}{\partial B} = \frac{\partial P_3}{\partial e''_c} \frac{\partial e''_c}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial B}, \quad \frac{\partial Q_3}{\partial B} = \frac{\partial Q_3}{\partial e''_c} \frac{\partial e''_c}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial B}$$

由式(12-17)和式(12-16)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial e''_c}{\partial B} &= - \frac{e''_c}{2(n^2 b^2 + c)} \frac{\partial c}{\partial B} \\ \frac{\partial c}{\partial B} &= \frac{2c\rho}{2c + n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial B}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial B} = \frac{\sin B \cos B (a^2 b^4 - b^2 a^4)}{\rho (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^2} \\ \frac{\partial c}{\partial B} &= \frac{2c}{2c + n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2} \frac{\sin B \cos B (a^2 b^4 - b^2 a^4)}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^2} \\ \frac{\partial e''_c}{\partial B} &= - \frac{e''_c}{n^2 b^2 + c} \frac{c}{2c + n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2} \frac{\sin B \cos B (a^2 b^4 - b^2 a^4)}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^2} \\ \frac{\partial P_3}{\partial B} &= \frac{4\pi G \delta_i e''_c{}^3 \sin B \cos B (1 + e'^2) (b^2 a^4 - a^2 b^4)}{e'^3 (1 + e''_c{}^2) (n^2 b^2 + c) (2c + n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2) (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^2} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial B} &= \frac{4\pi G \delta_i e''_c{}^3 \sin B \cos B (1 + e'^2) (b^2 a^4 - a^2 b^4)}{e'^3 (1 + e''_c{}^2) (n^2 b^2 + c) (2c + n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2) (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^2} \end{aligned}$$

因为 δ_e 、 γ_0 、 ν_i 、 e''_c 、 c 、 ρ 以及 P_3 和 Q_3 均为纬度的函数,故由以上各微分公式最终得到的 $\frac{dg_e}{d\delta_e}$ 也是纬度的函数,于是可设 $\frac{dg_e}{d\delta_e} = f(B)$ 。

由式(12-19)可得

$$dg_e = f(B) d\delta_e \quad (12-24)$$

在推导解析函数 $f(B)$ 时,将 g_e 当作地幔理论重力值, δ_e 当作地幔纬向正常密度,二者是纬度的函数;但在解析函数 $f(B)$ 的推导完成后,则应将 g_e 当作地幔实际重力值, δ_e 当作地幔实际纬向密度,二者是经度和纬度的函数。于是在式(12-24)中,将 dg_e 理解成“地表实际重力”扣除地核影响后的数值在水平方向的微分,是可以由实测获得的“直接量”,而 $d\delta_e$ 是“地幔实际纬向密度”在水平方向的微分,是由“直接量” dg_e 通过已知解析函数 $f(B)$ 计算出来的“间接量”,所以

$$dg_e = g_e(L, B) - g_e(L_0, B_0), \quad d\delta_e = \delta'_e(L, B) - \delta'_e(L_0, B_0) \quad (12-25)$$

将式(12-25)代入式(12-24)可得

$$\delta'_e(L, B) = \delta'_e(L_0, B_0) + \frac{g(L, B) - g(L_0, B_0)}{f(B)} \quad (12-26)$$

式中, $\delta'_e(L_0, B_0)$ 为已知起点的地幔纬向密度值。因为式(12-26)是由微分公式转变而来,所以计算步长应越小越好。

按照“异常”等于“实际”减“正常”的传统,“地幔纬向密度异常”为

$$\Delta\delta_e(L, B) = \delta'_e(L, B) - \delta_e(B) \quad (12-27)$$

将式(12-26)和式(8-7)代入式(12-27)可得

$$\Delta\delta_e(L, B) = \delta'_e(L_0, B_0) + \frac{g(L, B) - g(L_0, B_0)}{f(B)} - \sqrt{\delta_e'^2 \cos^2 B + \delta_p'^2 \sin^2 B} \quad (12-28)$$

以上就是重力求解地幔纬向密度异常的公式,式中 L 为经度, B 为纬度。地幔纬向密度异常包含经度并不奇怪;在地球重力学中,水准椭球为旋转椭球,故正常重力仅是纬度的函数;但是,在地球表面实测的重力则不仅包含纬度而且包含经度;所以,作为实测重力与正常重力之差的异常自然也就同时包含经度和纬度。同理,地幔纬向正常密度仅是纬度的函数,但地幔纬向密度异常则是经度和纬度的函数。所以,“地幔纬向密度异常”实际上就是“地幔垂直平均密度异常”。

第 13 章 正常密度假说与均衡假说及 内波假说的比较

CHAPTER 13 Comparison of Normal Density Hypothesis with Isostatics and Internal Wave Hypothesis

Abstract: The mathematical expression of isostatics hypothesis is simple, but its meaning on geophysics and geology is not simple, and needs to be explored. Pratt's hypothesis called it as "thin mountain", meanwhile Airy's hypothesis called it as "root of mountain". From meaning of the type face, the hypothesis is related to mass distribution and movement on the earth surface. The force in isostatics hypothesis is mantle buoyancy, but the force in normal density hypothesis is "horizontal" gravity of mantle. Comparing normal density hypothesis with isostatics hypothesis is helpful for developing normal density hypothesis theory. Their relationship needs to be deeply studied and discussed.

根据印度 1850 年所完成的大地测量,普拉特先后于 1854 年与 1859 年,爱黎(G. B. Airy)于 1855 年提出了地壳均衡假说。均衡假说的数学表达为,“地壳柱体的厚度乘该柱体的平均密度等于常数”;因此,均衡假说实际上是一种关于地壳密度分布的理论。均衡假说的数学表达式是很简单的,但地球物理学和地质学含义却不那么简单,还需进行深刻的发掘。普拉特假说又称“山轻说”,而爱黎假说又称“山根说”,按照字面理解,应与地球表面的物质分布、及其运动方式(造山运动)有一定的联系。均衡假说中的力是“地幔浮力”,正常密度假说中的力是地幔的“水平重力”。将正常密度假说与均衡假说进行比较,有助于正常密度假说在理论上的发展,这两种学术思想的关系值得进行深入的研究和探讨。

§ 13.1 密度分布与补偿作用

均衡假说考虑“地壳的垂直平均密度”;若假设地核为匀质椭球,则正常密度假说考虑的是“地幔的垂直平均密度”。

均衡假说考虑密度的垂直变化,按照“山轻说”的观点,“高程越高,密度越小”。正常密度假说考虑的是密度的水平变化,“纬度越高,密度越大”。

均衡假说和正常密度假说都认为山体为“质量亏损”是“低密度区”,海底为“质量过剩”是“高密度区”(参见图 11-1 和图 11-2)。

均衡假说考虑“垂直补偿”。均衡假说认为,山脉为“质量亏损”,海底为“质量过剩”;但是,海底的“质量过剩”并不会对山脉的“质量亏损”进行补偿。按照“山根说”的观点,“质量亏损”的山脉因垂直补偿作用而形成“山根”,“质量过剩”的海底因垂直补偿作用而形成“反山根”(密度较大的地幔岩非常接近地表,与海底的地形相反)。

正常密度假说考虑“水平补偿”。地幔水平重力总是把地幔物质从“密度异常高”($\Delta\delta_e > 0$)的地区推向“密度异常低”($\Delta\delta_e < 0$)的地区。在水平重力的驱动下,地幔物质沿水平方向发生迁移和调整,最终达到地幔密度的正常分布状态 $\delta_e = \delta_e(B)$ 。

§ 13.2 构造形态与运动方式

按照均衡假说,山脉与山根相对应,即地壳山脉下对应存在着地幔盆地;海底与反山根相对应,即地壳盆地下对应存在着地幔山脉。但正常密度假说的观点与之不同,由图 11-1 和图 11-2 可见,地壳山脉下对应存在的是地幔山脉,地壳盆地下对应存在的是地幔盆地。

均衡假说认为,物质的垂直运动导致构造的垂直运动。但正常密度假说却认

为,一方面水平重力驱动岩石圈沿水平方向由 $\Delta\delta_e > 0$ 的地区向 $\Delta\delta_e < 0$ 的地区运动。另一方面因水平重力驱动软流圈物质沿水平方向运动而使得岩石圈沿垂直方向发生运动; $\Delta\delta_e > 0$ 地区的岩石圈会因为软流圈物质的流失而下沉造成盆地沉陷, $\Delta\delta_e < 0$ 地区的岩石圈会因为软流圈物质的补充而上升造成山脉隆升;也就是说,物质的水平运动导致构造既发生垂直运动也发生水平运动。

§ 13.3 力学性质与演变机制

若山脉之下的山根不足或山根过剩及盆地之下的反山根不足或反山根过剩,地壳就会因“失衡”而发生垂直运动。均衡假说认为,“造山运动”的力源是低密度山根(地幔盆地)在高密度地幔中所受到的浮力,造成地面沉陷产生盆地的力源则是高密度的“反山根”(地幔山脉)因回归地幔而产生向下的拖拽力。

而水平重力是由密度异常 $\Delta\delta_e$ 引起的, $\Delta\delta_e$ 越大、水平重力也越大。 $\Delta\delta_e > 0$ 意味着物质“多余”, $\Delta\delta_e < 0$ 意味着物质“不足”。全球物质对“多余物质”的引力加上“多余物质”所受离心力的合力,就是“多余物质”所受到的水平重力。水平重力总是把物质从 $\Delta\delta_e > 0$ 的地区推向 $\Delta\delta_e < 0$ 的地区而使得 $\Delta\delta_e = 0$ 。如果地幔的密度处于正常分布状态 $\delta_e = \delta_e(B)$, 那么 $\Delta\delta_e$ 也就处处为零,地幔水平重力也就不复存在了。

均衡假说认为,越老的山系应该越是充分均衡的,山根达到最深,重力异常(布格异常)的负值最大。

正常密度假说的观点则完全相反,越老的山系应该越是密度平衡,山区的“低密度”程度应该最小,“负密度异常”接近为零,也就是说,越老的山系因“低密度”引起的重力异常(布格异常)的负值越小。

均衡假说还存在着另一种有利于正常密度假说的观点,对老的山系来说,山体会剥蚀,山根会“烂掉”,所以山体和山根在均衡之后会一起收缩。“阿巴拉契亚山表现为不大的负重力异常,标志它的山根下插不深,这对于一个老山系是合适的。就像地表地形遭受侵蚀而削低一样,阿巴拉契亚的山根正在消失”^[62]。

§ 13.4 正常密度假说与内波假说的比较

池顺良等于 2002 年出版了专著《海陆的起源》^[27],对板块构造学说提出了质疑,阐述了关于地壳运动的“内波假说”,基本观点如下:

地壳运动所需的能量是通过潮汐转化的地球自转能:由于日、月引力作用,引起地球自转速率减慢,自转能得以释放,成为地壳运动的能源。

潮汐应力引起莫霍面上内波的生长,从而产生驱动物质水平迁移的“潮波驱

动力”:由于存在交变潮汐应力,在莫霍面的斜坡带上出现了使莫霍面两侧物质相向迁移的水平向驱动力,称之为“潮波驱动力”。

两种不同介质分界面上发生的波动称为“内波”,内波通常发生在分层介质系统中:在地壳和地幔交界处,存在一种下地壳物质与上地幔物质的水平相向迁移运动,壳幔分层介质体系界面内波的生长,导致物质迁移运动。

“潮波驱动力”驱动莫霍面两侧的物质水平相向运动,推动大地构造的演化:下地壳物质与上地幔物质的水平相向迁移运动,在地槽区形成沉降与隆起带的交替分布;在海陆交界处发生更大时空尺度的物质迁移,使统一的地壳分化为厚薄不同的陆壳和洋壳。

地壳在水平方向保持稳定,没有板块的漂移和碰撞,地壳的垂直运动则是由壳下物质的水平运动引起的:内波假说从地壳中发生的垂直运动现象出发,最后不仅得到了地壳垂直运动的解释,还获得了关于地壳底部发生大规模水平运动的解释。这种地壳与上地幔物质大规模水平运动的概念与大陆漂移、板块运动的概念完全不同。这是一种发生在地壳深处的大规模物质水平迁移,迁移运动的时间尺度可跨越数十亿年,空间尺度可跨越上万公里。

从地壳的水平运动与垂直运动及其动力机制上来看,“正常密度假说”与“内波假说”有一些共同点,但也有一些不同点:

“内波假说”指出:大陆地壳物质经受强烈的风化、剥蚀作用,不断被搬运到海洋中沉积;一个满意的地壳演化理论必须能解释,为什么大陆经长期的削平风化作用仍能保持那么高^[17]?与“内波假说”一致,“正常密度假说”认为,地球密度在水平方向总要维持一种“正常分布”,一旦陆地的物质被搬运到海洋中引起“密度异常”,那么海洋中的这些“异常物质”就会以地幔物质流动的形式回到陆地下面引起山脉隆升来补偿剥蚀。

“正常密度假说”与“内波假说”都认为,地壳的垂直运动是由于壳下物质的水平运动引起的,这与李四光等地质学家提出的“盆山耦合现象”是相同的。

“内波假说”提出了与“正常密度假说”相近似的观点:“重力是推动地壳运动的杠杆,重力既是垂直力、也能够转化成强大的水平力,很难找到可用于推动地壳构造运动的非重力派生的水平力,所有构造运动的方式都能在地球重力场的作用下发生。”

“内波假说”认为,驱动地壳运动的“潮波驱动力”是太阳与月亮的引力引起的,是“外力”。但“正常密度假说”却认为,驱动岩石圈与软流圈运动的“水平重力”是地球的自引力引起的,是“内力”。

“内波假说”认为,驱动地壳运动的“潮波驱动力”在水平方向存在于莫霍面的两侧,而且方向是“相向的”。但“正常密度假说”却认为,驱动岩石圈与软流圈运动的“水平重力”在水平方向存在于整体岩石圈与软流圈之中,“水平重力”的方

向在同一地区是相同的,不是“相向的”。

“正常密度假说”认为,岩石圈板块的水平运动与垂直运动是一种辩证关系;一方面,岩石圈沿水平方向运动形成大陆漂移和板块运动,另一方面,岩石圈下的软流圈物质沿水平方向运动而使得岩石圈沿垂直方向运动形成山脉隆升和盆地沉陷。但“内波假说”却认为,不存在地壳的水平运动和板块的漂移与碰撞,地壳与上地幔物质大规模水平运动的概念与大陆漂移、板块运动的概念完全不同,这是一种发生在地壳深处的大规模物质水平迁移,时间尺度可跨越数十亿年,空间尺度可跨越上万公里。

“内波假说”对“正常密度假说”的质疑是:“如果不存在地幔密度异常自动产生的机制,在物质蠕动,重力势平衡之后运动也就停止了。构造运动是如何能够多次地进行?这是正常密度假说必须给以解答的问题。”^[95]关于这个问题,“正常密度假说”与“内波假说”的观点是不同的。“正常密度假说”是“有限论”,认为地幔中重力势平衡之后运动也就停止了,除非有什么条件造成新的地幔密度异常。

第 14 章 基于新编《系列世界地图》的全球板块分布图

CHAPTER 14 Global Plate Map Based on New Series World Map

Abstract: Traditional world map fits for expressing the relationship of eastern hemisphere and western hemisphere. This kind of world map has a disadvantage: the pole areas have large project deformation and the relationship around close zones is not clear. Such as Antarctic continent is 1.8 times of Australian, but on traditional map, the area of diagram of Antarctic is 3.8 times of Australian. Global plate map based on new series world map, it provides a new graphic tool for plate geodynamics research.

我国地处东、北半球,但目前通行的世界地图适用于表达中国与东半球的地理关系,却不适用于表达中国与北半球的地理关系。实际上,传统世界地图适用于表达东、西半球的地理关系,这种世界地图有个缺点:南、北半球的变形较大且与周缘地区的相互关系不太明确。例如,南极大陆的图形面积约为澳大利亚的图形面积的1.8倍;但在传统世界地图上,南极大陆的图形面积却约为澳大利亚图形面积的3.8倍。再如,南极大陆的形状在地球仪上像“孔雀”;但在“经向世界地图”上则完全不同。同理在北极地区也一样,传统世界地图上的俄罗斯北部、加拿大北部和格陵兰北部,均产生了形状和面积的巨大变形。

§ 14.1 世界地图的“双经双纬”概念

传统的世界地图有两种,一种是亚太地区常用的世界地图,以西经 30° 经线为分割线、以东经 150° 为中央经线;另一种是欧美地区常用的世界地图,以 180° 经线为分割线、以 0° 经线为中央经线。这两种世界地图沿经线方向纵向切割地球仪,故可称为“经向世界地图”。与之相对应,可以不同的纬线为中央纬线,沿纬线方向横向切割地球仪,这就是“纬向世界地图”。“经向世界地图”适用于表达东、西半球的地理关系,“纬向世界地图”则适用于表达南、北半球的地理关系。“经向世界地图”和“纬向世界地图”的有机组合,就形成了《系列世界地图》。

为了准确和完整地表达中国与东、西、南、北半球的地理关系,我们提出并实施了“双经双纬”编制《系列世界地图》的设计方案,即:《系列世界地图》共四种,“东半球版”和“西半球版”为“经向世界地图”,“北半球版”和“南半球版”为“纬向世界地图”。《系列世界地图》于2002年在武汉编制完成,以全方位、多角度反映出世界地理关系,体现了一种崭新的“全球观念”^[96-97],并已开始在不同领域得到较好的应用^[98-107]。

§ 14.2 “纬向世界地图”的投影方法

“经向世界地图”以不同经线为中央经线,其投影方法为传统的“等差分纬线多圆锥投影方法”^[108]。“纬向世界地图”以不同纬线为中央纬线,其投影方法则称为“广义等差分纬线多圆锥投影方法”。在“经向世界地图”上,经线是子午线、纬线是平行圈;子午线相交于南、北极点。对球面坐标来说,经度($-180^\circ, 180^\circ$)用 λ 来表示,纬度($-90^\circ, 90^\circ$)用 φ 来表示。于是,直角坐标与经、纬度的关系为

$$x = R\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = R\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = R\sin\varphi \quad (14-1)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (14-2)$$

式中, R 为地球的平均半径。

“纬向世界地图”与“经向世界地图”在概念上是对应的。在赤道上任选一点 P^+ , 其作用相当于“经向世界地图”的北极; 通过 P^+ 点与球心连直线相交于赤道上的另一点 P^- , 其作用相当于“经向世界地图”的南极。“广义经度”($-90^\circ, 90^\circ$)用 λ' 来表示, “广义纬度”($-180^\circ, 180^\circ$)用 φ' 表示。在“纬向世界地图”上, “广义纬线”为“广义子午线”、“广义经线”为“广义平行圈”。广义子午线收敛并相交于 P^+ 点和 P^- 点。

为了简明表达广义经、纬度与常规经、纬度的数学关系, 选点($\lambda = 90^\circ, \varphi = 0^\circ$)为 P^+ 点, 则点($\lambda = -90^\circ, \varphi = 0^\circ$)为 P^- 点。于是, 直角坐标与广义经、纬度的关系为

$$x' = R\cos\varphi'\cos\lambda', \quad y' = R\cos\varphi'\sin\lambda', \quad z' = R\sin\varphi' \quad (14-3)$$

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right), \quad \lambda' = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) \quad (14-4)$$

$$x' = -x, \quad y' = z, \quad z' = y \quad (14-5)$$

将式(14-5)代入式(14-1)得

$$x' = -R\cos\varphi\cos\lambda, \quad y' = R\sin\varphi, \quad z' = R\cos\varphi\sin\lambda \quad (14-6)$$

将式(14-6)代入式(14-4)得

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\lambda + \sin^2\varphi}}\right), \quad \lambda' = \arctan\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi\cos\lambda}\right) \quad (14-7)$$

以上即为由常规经、纬度计算广义经、纬度的数学关系式。

§ 14.3 研究板块动力问题的图形工具

全球板块分布图是研究板块相互作用和运动机制的图形工具, 但传统的全球板块分布图适用于反映东、西半球的板块构造分布, 却不适用于反映南、北半球的板块构造分布。例如, 南极洲板块在传统的全球板块分布图上存在着巨大变形^[117], 参见图 14-1。

依据板块运动模型 NUVEL-1, 采用《系列世界地图》的投影方法绘制全球板块分布图, 图中包含全球 13 个主要板块, 即: 太平洋板块、北美板块、南美板块、非洲板块、欧亚板块、澳大利亚板块、南极板块、加勒比板块、可可斯(Cocos)板块、纳兹卡(Nazca)板块、阿拉伯板块、印度板块、菲律宾板块, 与《系列世界地图》的版式相同, 图 14-2 为“东半球版”、图 14-3 为“西半球版”、图 14-4 为“北半球版”、图 14-5 为“南半球版”。

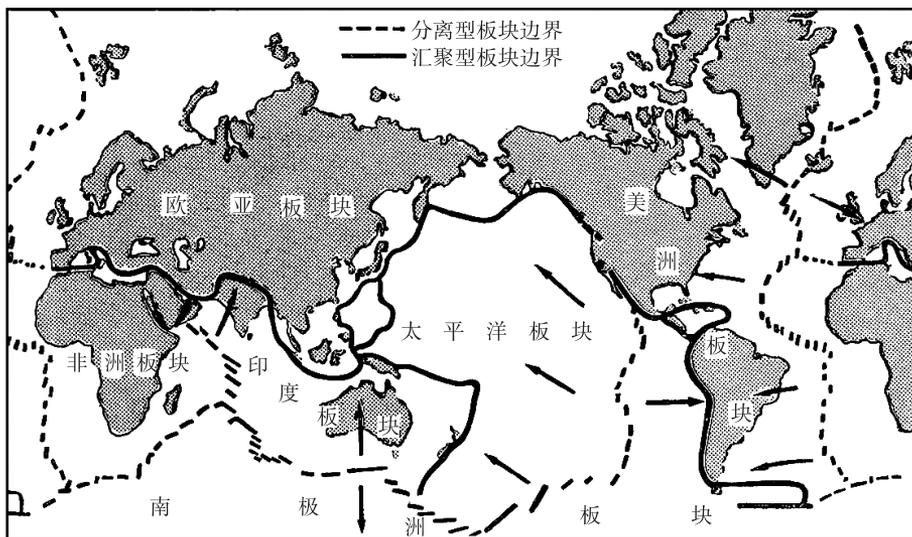


图 14-1 依据 LP68 绘制的全球板块分布图

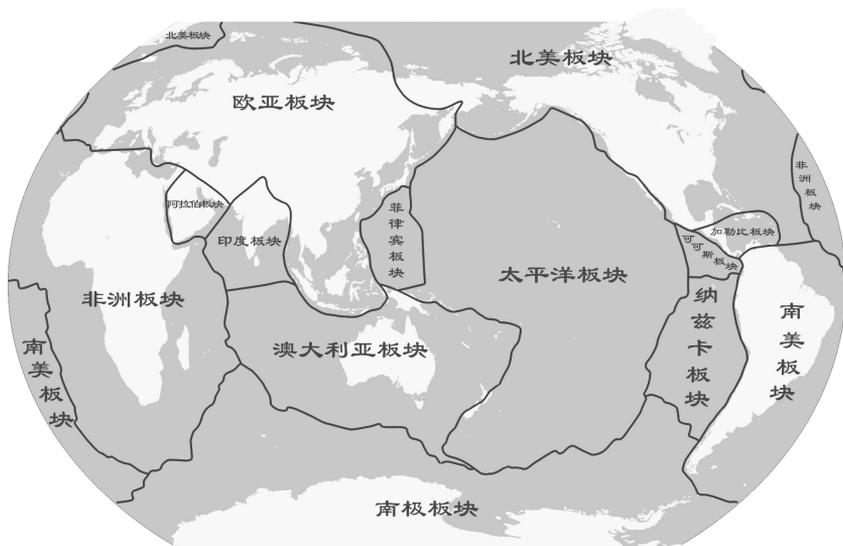


图 14-2 全球板块分布图(东半球版)

图形工具在板块理论中发挥过重要作用,魏格纳一开始就是通过观察世界地图,最终提出了大陆漂移学说,并发展为现在的板块构造学说。

目前,板块构造学说仍处于定性讨论阶段,还有一些根本问题没有解决,如板块构造的形成机制和演变规律以及板块运动的动力问题等。

基于《系列世界地图》的全球板块分布图以东、西、南、北四种视角,从经度、纬

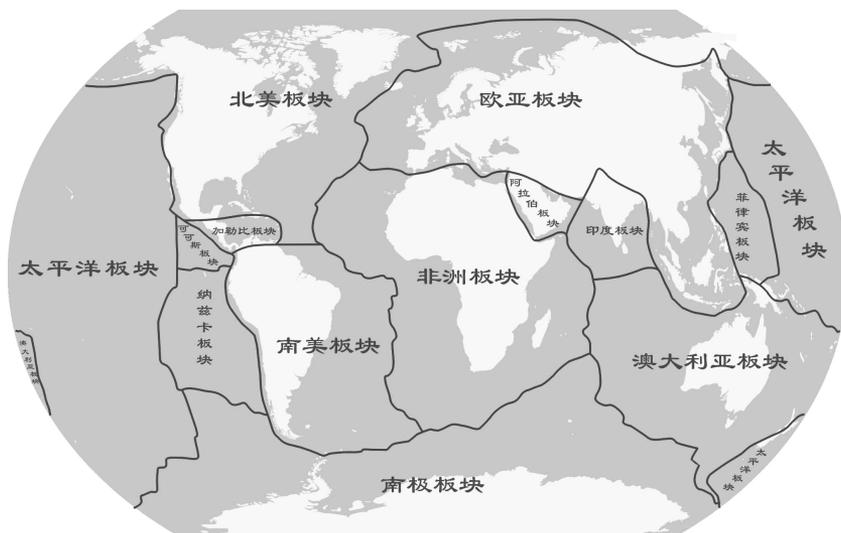


图 14-3 全球板块分布图(西半球版)

度两种方向,将全球板块构造以多元化的形式表达出来,为深入研究板块相互作用和运动机制,提供一种新的图形工具^[109]。

例如,图 14-2(东半球版)适用于研究太平洋板块,图 14-3(西半球版)适用于研究非洲板块,图 14-4(北半球版)适用于研究北美板块和欧亚板块,图 14-5(南半球版)适用于研究南极板块,等等。

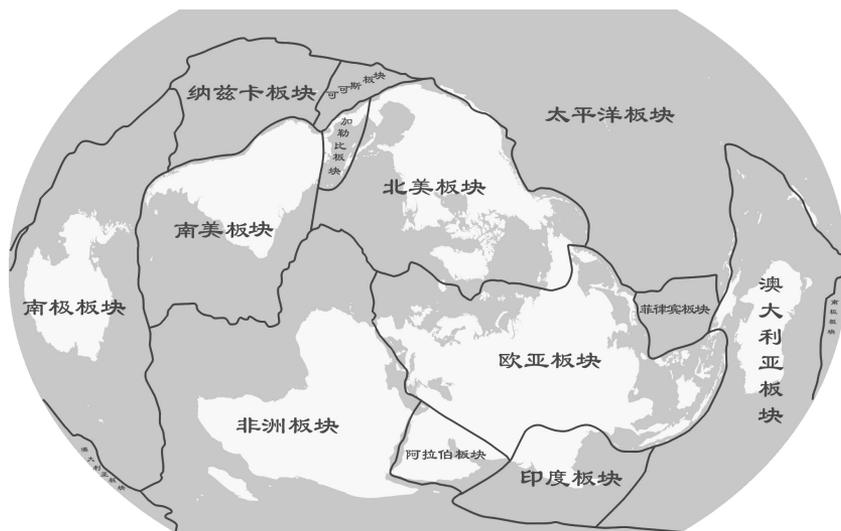


图 14-4 全球板块分布图(北半球版)

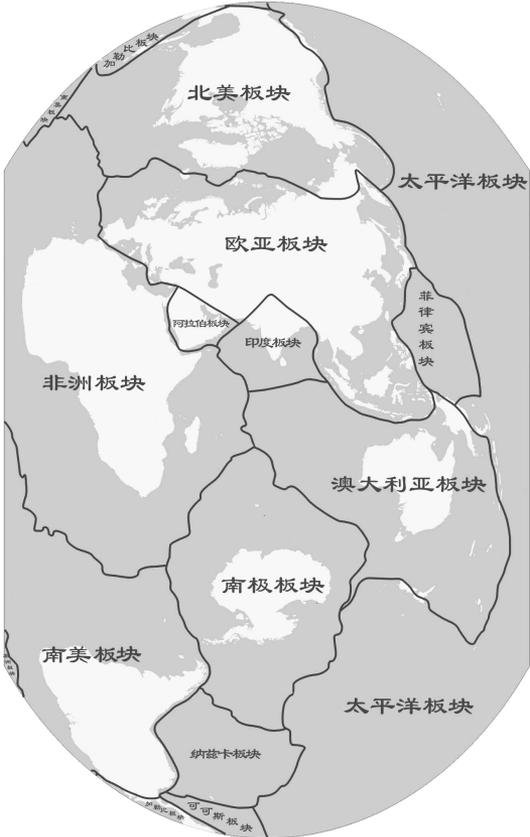


图 14-5 全球板块分布图(南半球版)

第 15 章 存在问题与研究方向

CHAPTER 15 Problems and Research

Abstract: There have been one hundred years of history since the continental drift was put forward. In earth gravity theory, it cost one hundred years from Bouguer's discover that the mass miss under Andes Mountain in 1749 to Pratt's isostasy in 1855. It also cost one hundred years from Stokes theory to Molodensky theory. The research on earth normal density hypothesis can not obtain great results in short time. To study deeply geodynamics issues of plate movement needs continuous hard probing work.

从 20 世纪初提出大陆漂移的动力问题,到现在已经过了一百年。在地球重力学中,从 1749 年布格发现安第斯山脉下面的质量亏损^[110]到 1855 年普拉特提出地壳均衡假说^[111-112]用了一百年;从 1849 年的斯托克斯理论^[113]发展到 1945 年的莫洛斯基理论^[114]也用了一百年。由此可见,对纬向正常密度假说的深入研究也不大可能在短期内得出结果。科学研究的历史上充满着大胆的假说,它们中的大多数被遗忘了,但其中的一部分却随着时间的推移变成了真理。地球纬向正常密度假说也不例外,要想深入到板块运动的动力问题中去,就必须连续不断地进行顽强的努力和艰苦的探索。

§ 15.1 地球密度扁率与纬向密度函数

现在采用的几何扁率值 $1/297.34$ 是布拉德于 1948 年给出的。若 δ_E 和 δ_P 分别为椭球赤道和极点的纬向密度,则椭球的密度扁率为 $f' = (\delta_E - \delta_P)/\delta_E$ 。就像几何扁率一样,密度扁率也应该存在“地长说”($\delta_E < \delta_P$)与“地扁说”($\delta_E > \delta_P$)的区别,虽然这种区别的地球物理学含义现在还不甚明了、有待深入研究。在地球重力学中,克莱劳定理给出了地球的几何扁率与重力扁率的数学关系。我们也应该对地球几何扁率与密度扁率的数理关系进行深入的理论研究,最终求解出二者的数学关系。第 7 章给了密度扁率为 $f' = 1/127$,这个值是非常初步的,深入的研究应得到越来越精确的密度扁率值。作为纬向正常密度函数 $\delta = \delta(B)$,第 7 章求解时仅采用水准椭球的赤道和极点重力为边界条件,即所谓“准等位条件”,深入的研究应采用整个水准椭球表面的重力为边界条件来求解。

§ 15.2 正常密度分布的唯一性问题

按照正常密度假说的观点,纬向密度的正常分布是由 1980 大地参考系统^[115],即是由地球的质量、形状、自转速度和表面的重力等位条件决定的。如果纬向正常密度真是地球的“固有特性”,那就应该从数学上严格证明:旋转椭球的纬向密度分布在 1980 大地参考系统下是唯一存在的。由重力反演的不唯一性可知,水准椭球的密度分布是不唯一的。但是,密度分布不唯一并不等于纬向密度分布不唯一。而且,即使纬向密度分布是不唯一的,但合理的或有地学意义纬向密度分布可以是有限的、甚至是唯一的。由纬向密度的定义可知,纬向密度是任一纬度由地表到地心的垂直平均密度,所以纬向密度在径向的坐标是不变的。此外,由于水准椭球为旋转椭球,所以纬向密度只有在纬度这一个方向上的坐标是变化的。纬向密度在坐标方向上所受到的约束使得纬向密度函数的非唯一性也必将受到约束,并为研究纬向密度函数的唯一性问题提供了可能。正如莫里茨所说的那样,水

准椭球内任何合理的物质分布是不知道的,但水准椭球的非均匀、非平衡的物质分布是一定存在的。应该对 1980 大地参考系统的密度含义(传统观念认为 1980 大地参考系统只有几何含义)进行深入的研究并最终证明:在 1980 大地参考系统下,水准椭球的密度分布是不唯一的,但水准椭球的“纬向密度”分布是存在的、唯一的、稳定的^[116]。

§ 15.3 分层纬向正常密度函数

除了求解“地球纬向正常密度函数” $\delta = \delta(B)$ 和“地幔纬向正常密度函数” $\delta_c = \delta_c(B)$ 外,深入的研究应求解出“地核纬向正常密度函数”,甚至“软流圈纬向正常密度函数”和“岩石圈纬向正常密度函数”。如此,我们就有可能将地球的径向密度分布 $\rho = \rho(r)$ 和各层的纬向密度分布结合在一起,求解出完整的“地球正常密度函数” $\sigma = \sigma(r, B)$ 。由地球的纬向密度概念和密度扁率概念,我们不难得到“地核纬向密度”和“地核密度扁率”以及“地幔纬向密度”和“地幔密度扁率”等概念。由于地核的几何扁率仅为地球几何扁率的四分之一,所以推测:地幔密度扁率应大于地核密度扁率,越接近地表,地层的密度扁率越大,地球物质进行纬向迁移的活动性越强。这个推测应该能够得到严格的数学证明。如果把“上地幔纬向正常密度函数”和“下地幔纬向正常密度函数”称为“地幔纬向正常密度函数”的“分函数”,那么“地幔纬向正常密度函数”则可称为“上地幔纬向正常密度函数”和“下地幔纬向正常密度函数”的“合函数”。同理,如果将地壳并入上地幔的话,那么“地球纬向正常密度函数”则可称为是“地核纬向正常密度函数”和“地幔纬向正常密度函数”的“合函数”。应该对“合函数”与其各“分函数”的关系(分层纬向密度函数的“径向叠加定理”)进行深入的研究,这与分层纬向密度的耦合方式有着密切的联系。

§ 15.4 重力异常解算密度异常的方法

地球的重力是可以实测的“直接量”,重力异常是由实测重力(加各项校整后)减去正常重力得到的。但是,纬向密度是无法实测的“间接量”,我们不能用“实测密度”减去“正常密度”的办法来得到“密度异常”。然而,在地球重力学中,大地水准面也是无法实测的间接量,而大地水准面异常是采用重力异常解算出来的。借鉴求解大地水准面异常的思路,应对确定地球纬向密度分布的地球重力学方法进行深入研究,系统地建立相关的理论和方法,采用重力异常解算出密度异常。

§ 15.5 密度异常与重力异常的比较

由于地球是一个旋转椭球,地球密度在经度方向上的分布是处处相等的。所以,地球的纬向密度异常相当于“密度异常”。这一点与重力完全相同。因为地球的正常重力也仅仅只是纬度的函数,所以,地球的重力异常相当于“纬向重力异常”。当然,我们这里所说的“密度异常”不是针对地球任一点的密度的,而是针对地球任何一向径上的平均密度的,是针对地球的“垂直平均密度”的。从研究大陆漂移动力问题的方面来看,重力异常与纬向密度异常在地球重力学中有着密切的关系。与重力异常对应的理论是地壳均衡假说,按照地壳均衡假说的观点,重力异常为正值的地区受到一个向下拖拽的力,重力异常为负值的地区受到一个向上抬升的力。也就是说,重力异常的存在表明该地区在垂直方向受到“均衡重力”的影响。与密度异常对应的理论是“地球正常密度假说”,按照正常密度假说的观点,密度异常的存在表明该地区在水平方向受到“水平重力”的影响。深入的研究应该对与重力异常对应的“均衡重力”和与密度异常对应的“水平重力”进行综合研究,探讨这两种动力的数理关系,以及这两种动力在大陆漂移(或板块运动)的动力问题中的联合贡献。

§ 15.6 青藏高原隆起与大陆动力学研究

在板块构造学说建立之前,人们用“大陆构造学说”来认识大陆的构造运动,对于那些大陆构造学说无法解释的动力学现象,则通通归咎于当时还十分神秘的海洋。板块构造学说的兴起使得“知陆不知海”的大陆构造学说逐渐走向了衰亡。虽然板块构造学说近乎完美地描述了大洋板块的动力学过程,但在解释大陆板块的动力学过程时却显得有些乏力。为了弥补板块构造学说的“知海不知陆”,“大陆动力学”的研究计划应运而生。青藏高原的隆起问题是大陆动力学的核心问题。现行的观点是,印度板块和欧亚板块碰撞导致青藏高原的隆起,两大板块的碰撞边界在雅鲁藏布江断裂带,两大板块的碰撞原因是印度板块向北俯冲。但是,从全球板块的分布状况来看,印度洋中脊很难提供驱动印度板块向北运动的动力。况且,简单地用俯冲、碰撞的观点也无法解释远离碰撞边界的天山-阿尔泰山系的隆起和塔里木盆地的巨大沉降。板块构造学说在大洋上成功地将板块构造的水平运动(海底扩张)和垂直运动(海沟下沉)统一在一起,却不能在大陆上将板块构造的水平运动(板块碰撞)和垂直运动(高原隆起或盆地塌陷)统一在一起。

按照正常密度假说的观点,“水平重力”使岩石圈发生水平运动(俯冲和碰撞),而软流圈中由“水平重力”驱动的物质水平运动又致使其上方的岩石圈发生

垂直运动(抬升和沉降)。在印度洋、印度次大陆和中亚等地均存在着大型的低密度中心,应该对这些低密度中心与密度异常的关系以及这些低密度中心的地球动力学含义进行深入研究,应用正常密度假说分析青藏高原的密度分布的动力学含义,最终了解大陆物质的增生与消减过程。

§ 15.7 环太平洋地震带的形成机理

凡是看到过全球地震分布图的人一定会对“环太平洋地震带”留下深刻印象。据统计,环太平洋地震带上发生的地震占全球发生地震总数的百分之七十五以上。那么为什么大西洋、印度洋和北冰洋不存在像太平洋那样的地震带?到底是太平洋的结构与众不同还是太平洋的起源与众不同呢?看来这又是一个地球科学的未解之谜。我们可以猜测,太平洋地区一定发生过某种震撼人心的地学事件,这一事件使得太平洋中的地球物质突然缺失,造成该地区的巨大密度异常;这时,按照正常密度假说的观点,地球物质应从四面八方涌向太平洋,受太平洋大陆坡阻碍而形成环太平洋地震带。

§ 15.8 汶川大地震及青藏高原“物质东流”成因研究

从板块运动的角度分析,汶川大地震是印度板块推挤欧亚板块的结果。印度板块由南西向北东方向以大约每年 40 mm 的速度俯冲挤压欧亚板块,不仅造成青藏高原的隆升,同时也挤压部分青藏高原地壳物质以大约每年 20 mm 的速度向东运动。东流的物质受到扬子地块的刚性阻挡,在扬子地块边缘——四川西部产生了造山运动,形成了南起四川泸定、北达陕西勉县、北东走向的龙门山脉,并使地质构造坚固的扬子地块岩层发生褶皱,形成了四川盆地。在地质构造相对薄弱的龙门山脉形成了北东南西走向的构造——龙门山逆冲推覆断裂带。汶川大地震的最根本动力来源是青藏高原和华南地块之间的相对运动在断裂带上产生的能量积累和释放。如果说汶川大地震成因是青藏高原的“物质东流”,那么“物质东流”的成因又是什么?按照正常密度假说的观点,物质流动的原因是密度异常;于是,深入的研究应围绕青藏高原及周边地区物质密度分布结构以及相关板块的动力关系展开^[121 ~ 129]。

§ 15.9 “华北克拉通破坏”的机制研究

地球的内部结构从外到内分地壳(岩石圈)、地幔和地核,克拉通(Craton)是漂浮在软流圈(地幔上层)的一个坚硬的板块。它由上部前寒武纪地壳和下部巨厚

的、冷的、耐熔的岩石圈地幔组成。克拉通比较稳定,没有或有很弱的岩浆活动和构造活动。“克拉通破坏”就是在地质作用下,岩石圈地幔变薄,其物理化学性质也发生了变化。我国华北克拉通的东部,包括北京周边,燕山山脉,胶、辽半岛,有很强的中生代岩浆活动。花岗岩都露出地表。我们在对花岗岩进行同位素分析时发现,花岗岩中有很多来自软流圈的物质,也就是说软流圈的东西在花岗岩成岩过程中就进入其中了,这证明此地的软流圈深度小于 100 km,说明这些地方的岩石圈变薄了,发生了克拉通破坏。世界上有很多和华北克拉通相似的克拉通,其他的克拉通没有发生克拉通破坏,这一地质现象与其他稳定的克拉通明显不同,研究华北克拉通破坏对探索地球上克拉通的形成与演化、地质历史时期超大陆的形成与演化、大陆地壳的生长具有重要的地质意义。“华北克拉通破坏”研究中最重要科学问题是克拉通破坏的机制^[130]:软流圈上涌的机制是什么?是岩石圈的拆沉导致了软流圈的上涌还是软流圈的上涌导致了克拉通的破坏?这是华北克拉通破坏动力学机制的核心问题。按照正常密度假说和板块运动重力学机制的观点,软流圈上涌的机制是因为岩石圈下地幔密度异常 $\Delta\delta_e < 0$ (参见图 11-2),那么,我们不禁要问,岩石圈拆沉的机制是否与地幔密度异常 $\Delta\delta_e > 0$ (参见图 11-1)有关呢?

参 考 文 献

- [1] 郭俊义. 物理大地测量学基础[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1994.
- [2] 郝晓光. 对重力测量纬度改正概念的修正[J]. 地壳形变与地震,1996,16(3) .
- [3] 方俊. 重力测量与地球形状学[M](上、下册). 北京:科学出版社,1975.
- [4] 郝晓光. 参数椭球表面的重力[J]. 地球科学,1997,22(2) .
- [5] 郝晓光,许厚泽,刘大杰. 地球的重力聚点及参数椭球的地球重力学性质[J]. 测绘学报, 2000,29(2) .
- [6] 郝晓光,许厚泽,刘大杰. 参数椭球数学性质的初步研究[J]. 测绘学报,2001,30(3) .
- [7] 郝晓光,刘大杰. 参数椭球的准等位条件[J]. 同济大学学报,2004,32(1) .
- [8] 郝晓光,刘根友. 参数椭球的密度分布研究. 测绘科学[J]. 2004,29(2).
- [9] 莫洛坚斯基. M. C,等. 地球形状与外部引力场的研究方法[M]. 沈鸣歧,等译,总参测绘局编印,1982.
- [10] 管泽霖,宁津生. 地球形状及外部重力场[M](上、下册). 北京:测绘出版社,1981.
- [11] 郝晓光. 地球的重力聚点与纬向正常密度假说[D]. 武汉:中国科学院测量与地球物理研究所,1999.
- [12] 郝晓光. 地球重力学的参数椭球和纬向密度理论——板块运动的纬向重力模式[R]. 上海:同济大学,2001.
- [13] 黄金水. 地球重力场与内部物理——理论大地测量学若干问题的研究[D]. 武汉:中国科学院测量与地球物理研究所,1996.
- [14] 郝晓光,许厚泽,刘大杰. 地球的密度扁率与纬向正常密度假说[J]. 中国科学 D 辑,2000, 30(4) .
- [15] 郝晓光,许厚泽. 水准椭球的纬向密度分布[J]. 测绘学报,1998,27(4) .
- [16] 莫里茨. H. 地球形状——理论大地测量学和地球内部物理学[M]. 陈俊勇,左传惠,译,北京:测绘出版社,1992.
- [17] Iona M. Why is g larger at the poles [J]. Am J Phys, 1978(46) .
- [18] Maialle M. Z, Hipolito O. Acceleration of gravity for the earth model as an ellipsoidal mass with nonuniform density [J]. Am J Phys, 1996(64) .
- [19] 郝晓光,刘根友. 地球纬向正常密度函数系数的修正[J]. 大地测量与地球动力学,2002,22 (2) .
- [20] 郝晓光,刘根友. 地幔纬向正常密度函数[J]. 测绘学报,2004,33(1) .
- [21] 郝晓光,刘根友. 似水准椭球[J]. 大地测量与地球动力学,2005,25(3) .
- [22] 杰弗里斯. H. 地球——它的起源和物理结构[M]. 张焕志,李致森,译,北京:科学出版社, 1985.
- [23] Suess E. The Face of the Earth[M]. translated form German by H. B. C. Sollas and H. J. sollas, Clarendon Press ,Oxford,1909.
- [24] 李四光. 地质力学方法[M]. 北京:科学出版社,1979.
- [25] 郝晓光,胡小刚,刘根友,等. 地球的正常密度[J]. 测绘学报,2009. (in press)

- [26] 布伦. K. E. 地球的密度[M]. 曹可珍,等译,北京:地震出版社,1982.
- [27] 池顺良,骆鸣津. 海陆的起源[M]. 北京:地震出版社,2002.
- [28] 史蒂芬·霍金. 时间简史[M]. 许明贤,吴忠超,译,长沙:湖南科学技术出版社,2002.
- [29] 基普·S. 索恩. 黑洞与时间弯曲[M]. 李泳,译,长沙:湖南科学技术出版社,2001.
- [30] 郝晓光,刘根友. 板块运动地球重力学机制探讨[J]. 地学前缘,2004,11(1).
- [31] 利布特里. L. 大地构造物理学和地球动力学[M]. 孙坦. 译,北京:地质出版社,1986.
- [32] 郝晓光. 板块运动的纬向重力模式[J]. 同济大学学报,2001,29(6).
- [33] 徐菊生,赖锡安,张国安,等,空间大地测量测定板块运动的新进展及其与地质学成果的比较[J]. 地壳形变与地震,2001,21(3).
- [34] Le Pichon X. Sea-floor spreading and continental drift [J]. J. Geophys. Res. , 1968,73.
- [35] Chase C G. Plate kinematics; The Americas, East Africa, and the rest of the world, Earth planet [J]. Sci. Lett. ,1978, 37.
- [36] Minster J B and Jordan T H. Present-day plate motions [J]. J. Geophys. Res. , 1978, 83.
- [37] DeMets C, et al. . Current plate motions [J]. Geophys. J. Intel. ,1990, 101.
- [38] Drewes H. Combination of VLBI, SLR and GPS determined station velocities for actual plate kinematics and crustal deformation models [R]. International association of geodesy symposia, 1989.
- [39] Argus D F and Gordan R G. Pacific-North America plate motion from VLBI compared with motion inferred from magnetic anomalies, transform faults, and Earthquake slip vectors [J]. J. Geophys. Res. ,1990,95.
- [40] 孙付平,赵铭. 现代板块运动的测量和研究——地球物理方法[J]. 地球物理学进展,1998, 13(1).
- [41] Argus D F and Heflin M B. Plate motion and deformation estimated with geodetic data from the global positioning system [J]. G. R. Lett. , 1995, 22(15).
- [42] Larson K M, Freymueller J T, Philipsen S. Global plate velocities from the global positioning system [J]. J. G. R. ,1997, 102(B5).
- [43] Kachishige Sato. Tectonic plate motion and station motion derived from rates of change of GPS baseline lengths [J]. Journal of the Geodetic, Society of Japan,1998, 44(3).
- [44] Sillard P, Altamim Z, Boucher C. The ITRF96 realization and dits associated velocity field [J]. G. R. L. , 1998, 25(17).
- [45] Zhang Qiang, Zhu Wenyao, Xiong Yongqin. Global plate motion models incorporating the velocity field of ITRF96 [J]. G. R. Lett. , 1999, 26(18).
- [46] Taylor F. B. Bearing of the tertiary mountain belt on the origin of the Earth's plan [J]. Geol. Soc. Am. Bull. ,1910(21).
- [47] 魏格纳 A. 大陆和海洋的形成[M]. 张冀冀,译,北京:商务印书馆,1986.
- [48] von Eötvös R. Verh. d. 17. Konf [M]. d. Int. Erdmessung, 1912:111.
- [49] Epstein P. S. Naturwissenschaften [J]. 1921,9:499.

- [50] * Lambert W. D. Am. J. Sci. [J]. 1921, 2:129.
- [51] * Ertel H. Gerlands Beitr. Geophys. [J], 1935, 43:327.
- [52] Prey A. Uber die Polflüchtkraft [J]. Gerlands Beitr. Geophys., 1936, 48:349-388.
- [53] * A. C. Clairaut. Theorie de la figure de la terre, tiree des principes de l'hydrostatique [M]. Paris, 1743.
- [54] 傅承义, 陈运泰, 祁贵仲. 地球物理学基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [55] Bullard E. C. The interior of the earth [M]. in G. P. Kuiper ed., The earth as a planet. Univ. of Chicago Press, 1954, 57-137.
- [56] Birch F. Density and composition of mantle and core [J]. J. Geophys. Res., 69, p. 4377, 1964.
- [57] Bullen K. E. The earth's density [M]. Chapman and Hall, London, 1975.
- [58] 费舍尔 R L, 雷维尔 R. 太平洋海沟. 威尔逊 J. T, 等. 大陆漂移 [R]. 《大陆漂移》翻译组, 译, 北京: 科学出版社, 1975:11-17.
- [59] Vening Meinesz F. A. Theory and practice of pendulum observation at sea [R]. Publ. Netherlands Geod. Comm., pts. 1 and 2, Waltman, 1929 and 1941.
- [60] Vening Meinesz F. A. Major tectonic phenomena and hypothesis of convection currents in the Earth [J]. Quart. J. Geol. Soc. London, 1948, 103:191.
- [61] Holmes A. Principles of Physical Geology. 2nd ed., Nelson, 1965.
- [62] 普雷斯 F, 锡弗尔 R. 地球 [M]. 高名修, 沈德富, 译, 北京: 科学出版社, 1986:482-483.
- [63] 雅各布斯 J. A, 拉塞尔 R. D, 威尔逊 J. T. 物理学与地质学 [M]. 刘光鼎, 译, 北京: 海洋出版社, 1984, 251-252.
- [64] Ewing M, Heezen B. C. Some problems of Antarctic submarine geology [J]. Am. Geophys. Union Monograph, 1956, 1:75-81.
- [65] Bullard E. C. The flow of heat through the floor of the Atlantic Ocean [J]. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., 1954, 222:408.
- [66] Sclater J. G, Jaupart C, Galson D. The heat flow through oceanic and continental crust and the heat loss of the earth [J]. Reviews of Geophysics and Space Physics, 1980, 18:269-311.
- [67] Dietz R. S. Continent and ocean basin evolution by spreading of the sea floor [J]. Nature, 1961, 190:854.
- [68] Hess H. H. History of ocean basins [R]. in Engel A. E. J, James H. L and Leonard B. F (eds.), Petrological Studies-a Volume in Honour of A. F. Buddington. Geol. Soc. Am., 1962: 599-620.
- [69] Vacquier V. Measurement of horizontal displacements along faults in the ocean floor [J]. Nature, 1959, 183:452.
- [70] Vine F. J, Matthews D. H. Magnetic anomalies over oceanic ridges [J]. Nature, 1963, 199:947.
- [71] Cox A, Doell R. R, Dalrymple G. B. Reversals of the earth's magnetic field [J]. Science, 1964,

* 本参考文献中有个别文献缺少文献题目或出版者名, 因为是古文献, 相关信息已丢失, 无法考证, 故有缺空。特此说明。

- 144;1537.
- [72] Barrell J, The strength of the Earth's crust [J]. *J. Geol.* 22, 1914, 22; 28-48.
- [73] Gutenberg B. Untersuchungen zur Frange, bis zu welcher Tiefe die Erde kristallinisf [J]. *Zeitschrift für Geophysik*, 1926, 2; 24-29.
- [74] 安德森 D. L. 地幔塑性层. 威尔逊 J. T, 等, 大陆漂移 [R]. 《大陆漂移》翻译组, 译, 北京: 科学出版社, 1975; 35-37.
- [75] McKenzie D. P, Parker R. L. The North Pacific: An example of tectonics on a sphere [J]. *Nature*, 1967; 216; 527.
- [76] Morgan W. J. Rises, trenches, great faults and crustal blocks [J]. *J. Geophys. Res.*, 1968, 73; 1959.
- [77] Le Pichon X. Sea-floor spreading and continental drift [J]. *J. Geophys. Res.*, 1968, 73; 3661; and corrections in 1970, 75; 2793.
- [78] Morgan W. J. Convection plumes in the lower mantle [J]. *Nature*, 1971, 230; 42.
- [79] Wilson J. T. Mantle plumes and plate motions [J]. *Tectonophysics*, 1973, 19; 149-164.
- [80] 李春昱, 板块构造学说的起源、发展和展望, 李春昱, 郭令智, 朱夏, 等. 板块构造基本问题 [R]. 北京: 地震出版社, 1986; 6-8.
- [81] 海斯卡涅 W. A, 莫里斯 H. 物理大地测量学 [M]. 卢福康, 等译, 北京: 测绘出版社, 1979.
- [82] 莫里茨 H. 高等物理大地测量学 [M], 宁津生, 管泽霖, 等译, 北京: 测绘出版社, 1984.
- [83] 郝晓光, 方剑, 刘根友. 纬向正常密度假说与内波假说的比较 [J]. *地球物理学进展*, 2005, 20(4).
- [84] 马杏垣. 重力作用与构造运动 [M]. 北京: 地震出版社, 1989.
- [85] Dutton C. E. On some of the greater problems of physical geology [J]. *Bull. Wash. Phil. Soc.* 1889, 11; 51-64.
- [86] 李四光. 地质力学概论 [M]. 北京: 科学出版社, 1973.
- [87] 克鲁泡特金 П. H, 留斯吉赫 E. H, 鲍瓦罗-什维柯夫斯卡娅 H. H. 大陆与大洋的重力异常及其对大地构造的意义 [M]. 刘光鼎, 译, 北京: 科学出版社, 1963.
- [88] 梁元博. 海底构造 [M]. 北京: 科学出版社, 1983.
- [89] 白文吉, 等. 山系的形成与板块构造碰撞无关 [J]. *地质论评*, 1993, 39(2).
- [90] 方剑, 许厚泽. 青藏高原及其邻区岩石层三维密度结构 [J]. *地球物理学报*, 1997, 40(5).
- [91] 方剑, 许厚泽. 全球地幔密度异常及其构造意义 [J]. *测绘学报*, 2000.
- [92] 傅容珊, 董树谦, 黄建华, 等. 地震层析成像之密度异常驱动地幔对流模型 [J]. *大地测量与地球动力学*, 2003, 23(1).
- [93] 傅容珊, 冷伟, 常筱华. 地幔对流与深部物质运移研究的新进展 [J]. *地球物理学进展*, 2005, 20(1).
- [94] 郝晓光, 方剑, 柳林涛, 等. 再论纬向正常密度假说与内波假说的比较 [J]. *地球物理学进展*, 2007, 22(1).
- [95] 池顺良. 就“纬向正常密度假说与内波假说的比较”一文与郝晓光、方剑、刘根友三位博士交换意见 [J]. *地球物理学进展*, 2006, 21(4).

- [96] 郝晓光,徐汉卿,刘根友,等. 系列世界地图[J]. 大地测量与地球动力学,2003,23(2).
- [97] 徐汉卿,汪冰,张寒梅,等.《系列世界地图》上的专题内容[J]. 地理空间信息,2003(1).
- [98] 郝晓光,朱建钢,薛怀平,等. 中国第21次南极考察雪龙船实时航迹图[J]. 极地研究,2005,17(2).
- [99] 徐汉卿,朱建钢,薛怀平,等. 雪龙船南北极考察走航图的制作[J]. 测绘科学,2005,30(6):97-98.
- [100] 薛怀平,徐汉卿,朱建钢,等. 雪龙船实时航迹图中的技术处理方法[J]. 极地研究,2006,18(1):46-51.
- [101] 徐汉卿,薛怀平,廖小韵,等. 中国首次环球大洋科考航线图[J]. 地理空间信息,2006(5):74-76.
- [102] 郝晓光,陈晓峰,张赤军,等. 中国二代卫星导航系统设计覆盖范围的探讨[J]. 大地测量与地球动力学,2007,27(1):119-122.
- [103] 刘根友,郝晓光,陈晓峰,等. 对我国二代卫星导航系统设计覆盖范围向北扩展星座方案的初步探讨[J]. 大地测量与地球动力学,2007,27(5).
- [104] 郝晓光,徐汉卿,刘根友,等.《系列世界地图》及其应用与推广[J]. 地球物理学进展,2007,22(4).
- [105] 徐汉卿,薛怀平,廖小韵,等. 国际航空线在北半球版世界地图上的表示[J]. 测绘科学(增刊),2009年4月.
- [106] 廖小韵,徐汉卿,汪冰,等. 北冰洋航海线在世界地图上的表示及相关讨论[J]. 大地测量与地球动力学(增刊),2009.
- [107] 廖小韵,张侠,徐汉卿,等. 北极航道在新编世界地图上的表示[J]. 测绘科学(增刊),2009年10月.
- [108] 吴忠性. 地图投影[M]. 北京:测绘出版社,1980.
- [109] 郝晓光,方剑,柳林涛,等. 基于新编《系列世界地图》的全球板块分布图[J]. 地球物理学进展,2006(4):1108-1112.
- [110] * Bouguer P. La figure de la terre determinee par les observations de l'equateur [M]. Paris, 1749.
- [111] Pratt J. H. On the attraction of the Himalaya Mountains and of the elevated regions beyond them upon the plumb line in India[J]. Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1855,145:53-100.
- [112] Airy G. B. On the Computation of the effect of the attraction of mountain masses as disturbing the astronomical latitude stations in geodetic survey[J]. Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1855, 145:101-104.
- [113] Stokes G. G. Trans. Camb. Phil. Soc. [J]. 1849,8:672-695.
- [114] Molodenskiy M. S, Eremeev V. F, Yurkina M. I. Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth [M]. Transl. from Russian (1960), Israel Prog. For Scient. Transl., Jerusalem,1962.
- [115] Moritz H. Geodetic reference system 1980 [J]. In., C. C. Tscherning, The Geodesist's Handbook, Bull. Geod., 1984,581.

- [116] 郝晓光,方剑,柳林涛,等.水准椭球密度问题研究[J].地球物理学进展,2008,23(2).
- [117] 金性春.板块构造学基础[M],上海:上海科学技术出版社,1984.
- [118] Belousov V. V. Basic trends in the evolution of continents [J]. Tectonophy,1972,13.
- [119] 曾融生.固体地球物理学导论[M].北京:科学出版社,1984.
- [120] 杨森楠,杨巍然.中国区域大地构造学[M].北京:地质出版社,1985.
- [121] 郝晓光.L&R-ET重力仪在南极中山站记录到不明地学事件[J].极地研究,1997,9(3).
- [122] 郝晓光,许厚泽,郝兴华,等.重力高频扰动与地震[J].地壳形变与地震,2001,21(3).
- [123] 郝晓光,胡小刚,许厚泽,等.汶川大地震前的重力扰动[J].大地测量与地球动力学,2008,28(3).
- [124] 郝晓光,胡小刚.宽带地震仪资料证实汶川大地震“震前重力扰动”[J].地球物理学进展,2008,23(4).
- [125] 胡小刚,郝晓光.汶川大地震宽带地震仪短临异常及成因初探[J].地球物理学报,2008,51(6).
- [126] 傅容珊,万柯松,崇加军,等.地震前兆还是其他因素?——与“汶川大地震宽带地震仪短临异常及成因初探”作者商榷[J].地球物理学报,2009,52(2).
- [127] 胡小刚,郝晓光.2009年3月19日Mw7.6级汤加大地震的“震前扰动”现象[J].地球物理学进展,2008,24(3).
- [128] 胡小刚,郝晓光.强台风对汶川大地震和昆仑山大地震“震前扰动”影响的分析[J].地球物理学报,2009,52(5).
- [129] 郝晓光,胡小刚.“震前扰动”现象:从模糊走向清晰——对傅容珊教授商榷文章的回答[J].地球物理学报,2009.(in press)
- [130] 吴福元,徐义刚,高山,等.华北岩石圈减薄与克拉通破坏研究的主要学术争论[J].岩石学报,2008,24(6).

后 记

著名地球重力学家、奥地利的莫里茨(H. Moritz)在他的《地球形状:理论大地测量学和地球内部物理学》一书中写道:“莫洛坚斯基的理论要求大地测量学只限于研究地球表面形状和外部重力场,并认为地球的内部结构是地球物理学的事。但大地测量学和地球物理学之间老的很清楚的分界线已经开始消失。1980 大地参考系统采用等位椭球作为参照面,因此很自然地会提出这样一个问题,即这一椭球所相应的物质分布构形。类似地,也要求研究地球物质分布的异常,考虑重力场与地球内部的密度分布之间不可分割的联系。”

莫里茨认为应该研究“重力场与地球内部的密度分布之间不可分割的联系”,可传统的地球重力学却认为“重力场与地球内部物质的分布无关”。在传统的地球重力学中,水准椭球的密度是不知道、也不用知道的;但现在莫里茨却提出要研究“这一椭球所相应的物质分布构形”。实际上,这应该就是摆在地球重力学面前的新课题。

莫里茨讲了大地测量学与地球物理学相结合的必然性。但是,除了这一个“必然性”外,还应该有一个“必然性”,这就是大地测量学与地质学相结合的必然性。大陆漂移假说的理论基础是地壳均衡假说,所以应该说大陆漂移假说是地质学与大地测量学相结合的产物。但是,“魏格纳未能够从物理学上令人满意地阐明大陆漂移的原因”,而将其归因于“目前还不清楚的力量”。既然地质学主动与大地测量学相结合能产生大陆漂移假说,那么大地测量学也就有可能主动与地质学相结合,阐明大陆漂移及板块运动的地球重力学成因。

在传统的地球重力学(大地测量学)中,“重力异常”与“密度异常”的关系有点含糊,只能笼统地说,“重力异常高区”对应高密度体、“重力异常低区”对应低密度体,重力异常“相当于”密度异常。但是,“重力异常”不完全等于“密度异常”,“重力异常”与“密度异常”的关系是一个令人深思的问题。

在地球重力学中,正常重力是纬度的函数,而重力异常则是经度和纬度的函数。正常密度和密度异常也一样,正常密度是纬度的函数,密度异常则与重力异常一样是经度和纬度的函数。所以,我们应该可以这样说,“正常密度”就是“垂直平均正常密度”,“密度异常”就是“垂直平均密度异常”。

实际上,“地球正常密度假说”并不是反传统的,因为水准椭球表面的“正常重力”是与地球的“重力异常”相对应的。因此,继承大地测量学的传统方法来研究水准椭球的“正常密度”和地球的“密度异常”,也就不是什么离经叛道之举,而是

顺理成章之事了。

从 20 世纪初提出大陆漂移的动力问题,到现在已经过了一百年。在地球重力学中,从 1749 年布格发现安第斯山脉下面的质量亏损到 1855 年普拉特提出地壳均衡假说用了一百年,从 1849 年的斯托克斯理论发展到 1945 年的莫洛坚斯基理论也用了一百年。由此可见,对正常密度假说的深入研究也不大可能在短期内得出结果。科学研究的历史上充满着大胆的假说,它们中的大多数被遗忘了,但其中的一部分却随着时间的推移变成了真理。地球正常密度假说也不例外,要想深入到板块运动的动力问题中去,就必须连续不断地进行顽强的努力和艰苦的探索。或许我们有理由无比兴奋地猜想:深刻揭示板块运动及地壳运动驱动机制的历史性机遇,莫非真的已经悄然来到了中国学者的面前?

作者
2009 年 6 月