水准椭球密度问题研究

郝晓光, 方 剑, 柳林涛, 刘根友, 胡小刚
(中国科学院测量与地球物理研究所动力大地测量学重点实验室,武汉 430077)

摘　要　本文总结了作者等最近十年来对地球重力学"水准椭球密度问题"进行研究的初步结果,首次提出了"密度水准椭球"概念,给出了从"匀质椭球"、"参数椭球"、"纬向密度椭球"、"似水准椭球"到"密度水准椭球"的研究路线,并对该问题的研究前景进行了讨论.

关键词　匀质椭球,参数椭球,纬向密度椭球,似水准椭球,密度水准椭球

中图分类号　P312,P223　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1004-2903(2008)02-0392-06

Research on density of the level ellipsoid

HAO Xiao-guang, FANG Jian, LIU Lin-tao, LIU Gen-you, HU Xiao-gang
(Key Laboratory of Dynamical Geodesy, Institute of Geodesy and Geophysics, CAS, Wuhan 43077*, China)*

Abstract　This paper reviewed the study on density of the level ellipsoid proposed by author and his colleagues during last ten years, presents the conception of Density Level Ellipsoid. These research approaches include uniform ellipsoid, parameter ellipsoid, latitudinal density ellipsoid, quasi-level ellipsoid and density level ellipsoid. The prospect of the research is discussed.

Keywords　uniform ellipsoid, parameter ellipsoid, latitudinal density ellipsoid, quasi-level ellipsoid, density level ellipsoid

0　引　言

研究地球的形状和密度,是地球重力学的两项基本任务.在地球重力学中,关于地球形状的理论与方法已得到充分发展,而关于地球密度的理论与方法则显得比较薄弱.传统的司托克斯(G. G. Stokes)理论与莫洛金斯基(M. S. Molodensky)理论都是以回避地球密度分布为数学前提来研究地球形状的.伴随空间大地测量技术的迅速发展和地球形状学理论的不断完善,地球形状不应该是地球重力学永远不变的主题,而地球科学中关于地球整体密度分布方式的问题的不断出现,要求地球重力学的研究重点从地球形状转移到地球密度上来.

2004 年 2 月,德国波恩理论大地测量研究所、慕尼黑天文物理大地测量研究所、波兹坦地球科学研究中心(GFZ)、慕尼黑德国大地测量研究所、魏格纳极地和海洋研究所、汉堡海洋研究所、德累斯顿天体大地测量研究所、法兰克福大气与地球物理研究所和斯图加特水资源研究所这九所科研机构的 K. H. Ilk 和 J. Flury 等十七位地球科学家提出了一项题为"地球系统中的质量迁移和质量分布"的国家优先研究计划(Priority Research Program)[1].该项研究计划的重要内容是:地球质量异常迁移、质量交换,并最终达到全球物质平衡,而地球重力场及其变化的测量与之密切相关.

在地球重力学中,水准椭球是地球的理论模型,而传统的水准椭球是不含密度分布的.所以,研究地球的密度问题,应该首先研究水准椭球的密度问题.著名地球重力学家、奥地利格拉茨工业技术大学的莫里茨(H. Moritz)教授于上世纪 90 年代初指出:"水准椭球内任何合理的物质分布是不知道的,但水准椭球的非均匀、非平衡的物质分布是一定存在

收稿日期　2007-09-10;　**修回日期**　2007-12-20.
基金项目　国家自然科学基金(40574033)和中国科学院百人计划联合资助.
作者简介　郝晓光,男,1958 年生,上海人,中科院测量与地球物理研究所研究员、理学博士,主要从事地球重力学的理论研究,已发表论文 60 余篇.(E-mail:hxg@whigg.ac.cn)

的”[2];“试图去求定一切可能的密度分布,这在目前仍是一种科学幻想”[2].莫里茨教授的观点说明了研究水准椭球密度问题的必要性和艰难性,水准椭球的密度问题,也就是满足水准椭球的几何和物理条件去求解能代表地球基本特征的“含密度分布的水准椭球”(不妨称其为“密度水准椭球”),也许是当前地球重力学中最具数学魅力的经典问题.

本文作者等自上世纪 90 年代中期开始努力,对水准椭球的密度问题进行了深入的研究.十年来已形成了一条从“匀质椭球”、“参数椭球”、“纬向密度椭球”、“似水准椭球”到“密度水准椭球”的研究路线[3~12],并已将对“水准椭球密度问题”的研究逐步转化为对“板块运动机制问题”的研究[13~16].

1　匀质椭球

“水准椭球密度问题”的研究目标是要求解出满足水准椭球几何和物理条件、又能代表地球基本特征的“含密度分布的水准椭球”——“密度水准椭球”.水准椭球有两个基本条件,一是要满足 1980 大地参考系统的基本常数 (a, b, GM, ω) [17],二是要满足表面重力等位条件.意大利的索米里安(C. Somigliano,1929)推导出水准椭球表面重力公式为[18]

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \tag{1}$$

式中 γ_e 与 γ_p 为水准椭球赤道与极点重力值,B 是纬度,

$$\begin{cases} \gamma_e = \dfrac{GM}{ab}\left\{1 + m\dfrac{6(e' - \arctan e') - 2e'^3}{3[(3 + e'^2)\arctan e' - 3e']}\right\}, \\ \gamma_p = \dfrac{GM}{a^2}\left\{1 + m\dfrac{6(1 + e'^2)(e' - \arctan e') - 2e'^3}{3[(3 + e'^2)\arctan e' - 3e']}\right\}, \end{cases}$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM},\quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$

最简单的密度分布是匀质密度,在文献[3]中,作者推导出匀质椭球表面重力公式为:

$$g_0 = \sqrt{\frac{a^2 g_e^2 \cos^2 B + b^2 g_p^2 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \tag{2}$$

式中 g_e 与 g_p 为匀质椭球赤道与极点重力值,

$$\begin{cases} g_e = \dfrac{GM}{ab}\left[\dfrac{3}{2e'^2}\left(\dfrac{1 + e'^2}{e'}\arctan e' - 1\right) - m\right], \\ g_p = \dfrac{GM}{a^2}\,\dfrac{3(1 + e'^2)}{e'^2}\left(1 - \dfrac{\arctan e'}{e'}\right). \end{cases}$$

水准椭球的密度是不知道的,匀质椭球的密度则为 $\delta_0 = \dfrac{3M}{4\pi a^2 b}$.但是,匀质椭球满足 1980 大地参考系统的基本常数 (a, b, GM, ω),却不满足表面重力等位条件.为此,匀质椭球表面重力与水准椭球表面重力有较大的差别.在赤道,$g_e - \gamma_e = 379.315$ 毫伽($10^{-5}\,\mathrm{ms}^{-2}$);在极点,$g_p - \gamma_p = -756.087$ 毫伽($10^{-5}\,\mathrm{ms}^{-2}$)[3].显然,这种重力上的差别,是由于水准椭球密度的非匀质分布造成的.

实际上,不存在既满足 1980 大地参考系统基本常数 (a, b, GM, ω)、又满足表面重力等位条件的匀质椭球,也就是说,水准椭球一定是非匀质的.

2　参数椭球

最简单的非匀质椭球是“匀质分层椭球”.球体的引力问题比较简单,但椭球的引力问题却很复杂,牛顿用了几个球体的比例方法,只求出了匀质椭球上赤道与极点的引力比例.后来,经过麦克劳林(C. Maclaurin)、雅可比(K. G. J. Jacobi)、拉格朗日(J. L. Lagrange)、拉普拉斯(P. S. Laplace)、艾复来(J. Ivory)及恰勒(M. Chasles)等人的研究,终于解决了匀质旋转椭球的引力问题.然而,地球并不是匀质的,但大体上是“分层”的.所以,研究“分层椭球”的引力问题,在地球重力学中有重要意义.

作者在文献[4]中提出了匀质分层的“参数椭球”概念,并推导出了参数椭球表面的重力公式.参数椭球由“匀质分层”的双层椭球构成(见图 1),δ_i 为内密度参数、δ_e 为外密度参数,n 为界面深度参数.外椭球的长、短半径分别为 a 和 b,内椭球的长、短半径分别为 $a_n = na$、$b_n = bn$,$0 < n < 1$.

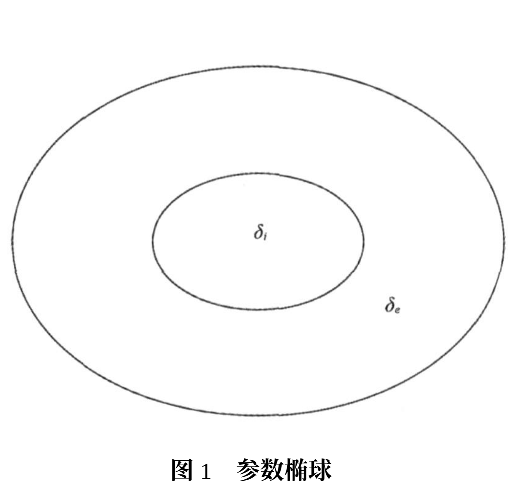

图 1　参数椭球

Fig. 1　Parameter ellipsoid

由于参数椭球的总质量 M 是不变的,对于不加约束条件的参数椭球来说,δ_i、δ_e 和 n 这三个参数只有两个是独立的,三者应满足以下函数关系

$$\delta_i = \frac{1}{n^3}(\delta_0 - \delta_e) + \delta_e \ , \tag{3}$$

于是,参数椭球表面重力公式为[4]:

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{\frac{(P - \omega^2)^2 a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \\ &= g(B, n, \delta_e) \ , \end{aligned} \tag{4}$$

式中:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3}\left[\frac{(\delta_0 - \delta_e)}{n^3}\left(\arctan e''_c - \frac{e''_c}{1 + e''^2_c}\right)\right. \\ &\quad \left. + \delta_e\left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2}\right)\right] \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3}\left[\frac{\delta_0 - \delta_e}{n^3}\left(e''_c - \arctan e''_c\right)\right. \\ &\quad \left. + \delta_e\left(e' - \arctan e'\right)\right] \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4 n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)}\right. \\ &\quad \left. - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)\right] \ , \end{aligned}$$

$$e''_c = \frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c}} \ , \ \rho^2 = \frac{a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + B^2 \sin^2 B} \ .$$

参数椭球把椭球各层的密度参数和界面深度参数作为变量引入椭球,这样就在椭球表面的重力与椭球内部的密度和界面深度之间建立起严格的函数关系,使之成为采用地球表面的重力测量数据来研究地球整体密度变化和界面深度变化的数学工具.作者等在文献[6]中深入研究了参数椭球的地球重力学性质,在纬度 35°21′32″处发现了“重力聚点”,并给出了“密度分布定理”、“物质流动定理”和“重力聚点定理”,为研究地球密度的整体变化提供了理论依据.

但是,与匀质椭球相似,不带约束条件的参数椭球满足 1980 大地参考系统的基本常数 (a, b, GM, ω),却不满足椭球表面的重力等位条件.

3　准等位条件

作者等在文献[9]中对参数椭球的等位问题进行了深入研究,由文献[4]可知,参数椭球表面的重力位为:

$$U = K - \frac{1}{2}(P - \omega^2)(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} Q z^2 \ ,$$

式中,P、Q、K 均为纬度的函数.设参数椭球极点和赤道的重力位为 U_p 和 U_e,令 $U_p = U_e$,这样,虽然没有满足椭球表面等位条件,但满足了椭球表面极点与和赤道两点的等位条件,这就是作者等定义的“准等位条件”[9]:

$$2(K_e - K_p) = P_e a^2 - Q_p b^2 - \omega^2 a^2 \ , \tag{5}$$

式中

$$\begin{aligned} K_p &= 2\pi G \frac{a^2}{e' n^3}\left[(\delta_0 - \delta_e)\arctan e''_b\right. \\ &\quad \left. + n^3 \delta_e \arctan e'\right] \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_e &= 2\pi G \frac{a^2}{e' n^3}\left[(\delta_0 - \delta_e)\arctan e''_a\right. \\ &\quad \left. + n^3 \delta_e \arctan e'\right] \ , \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned} P_e &= 2\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3}\left[(\delta_0 - \delta_e)\left(\arctan e''_a - \frac{e''_a}{1 + e''^2_a}\right) + n^3 \delta_e\left(\arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2}\right)\right] \ , \\ e''_a &= \frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c_a}} \ , \\ c_a &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4 n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)\right] \ , \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} Q_p &= 4\pi G \frac{1 + e'^2}{e'^3 n^3}\left[(\delta_0 - \delta_e)(e''_b - \arctan e''_b) + n^3 \delta_e (e' - \arctan e')\right] \ , \\ e''_b &= \frac{nbe'}{\sqrt{n^2 b^2 + c_b}} \ , \\ c_b &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4 n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)\right] \ , \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & E' = e' - \arctan e' \ , \ E'' = \arctan e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \ , \\ & E'_b = e''_b - \arctan e''_b \ , \ E''_a = \arctan e''_a - \frac{e''_a}{1 + e''^2_a} \ . \end{aligned}\right.$$

于是,由(5)式可得

$$\delta_e = \frac{\delta_0\left[2(\arctan e''_a - \arctan e''_b) - \frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2}\right] + \frac{\omega^2 e' n^3}{2\pi G}}{2(\arctan e''_a - \arctan e''_b) - \frac{E''_a}{e^2} + \frac{2E'_b}{e'^2} + n^3\left(\frac{E''}{e^2} + \frac{2E'}{e'^2}\right)} = \delta_e(n) \quad , \tag{6}$$

式中

$$\delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b},\ e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},\ e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2},$$

M 为地球质量,G 为万有引力常数,ω 为地球自转速度.

从(3)式和(6)式可见,参数椭球的“准等位条件”在参数椭球的密度参数 δ_e 和界面深度参数 n 之间构成了函数关系,使得参数椭球的双参数变成了单参数.

由文献[3]可知,不论是水准椭球还是匀质椭球,其表面重力都只是纬度的函数、而且从极点到赤道基本上可近似为纬度的线形函数.此外,又由文献[6]可知,当参数椭球的密度分布发生变化时,椭球表面的重力曲线只能围绕“重力聚点”旋转.所以,对于 (a, b, GM, ω) 相同、但密度分布不同的椭球来说,只要满足椭球表面的“准等位条件”,就能够近似满足椭球表面的重力等位条件.

作者等在文献[9]的研究中表明,“匀质分层”参数椭球的“准等位条件”是成立的,但“匀质分层”参数椭球的等位条件是不成立的.在等位条件下,“分层”参数椭球的密度分布必将呈现纬向分布状态,也就是说,“匀质分层”的水准椭球是不存在的,水准椭球的密度分布与纬度密切相关,水准椭球的密度分布一定“纬向”的.

4　纬向密度椭球

最早用于研究地球密度的地球重力学理论,是克莱劳(A. C. Clairaut)于1743年发表的平衡形状理论.勒让德(A. M. Legendre)和拉普拉斯(P. S. Laplace)于1825年根据这个理论得到了地球内部的密度定律.此后,达尔文(G. H. Darwin)于1884年、维歇特(E. Wiechert)于1897年、布拉德(E. C. Bullard)于1945年、布伦(K. E. Bullen)于1975年,也分别得到了类似的密度定律.但是这些密度定律得到都是地球的径向密度分布 $\delta = \delta(r)$,而没有得到地球的纬向密度分布 $\delta = \delta(B)$,使得地球重力学在研究地球纬向密度方面出现了空白.

研究地球密度的纬向分布对认识地球物质的迁移有重要意义,为了研究水准椭球密度按纬度分布的函数形式,作者等在文献[5]中提出了“纬向密度”概念:旋转椭球的向径可由地心纬度 ϕ 确定,定义该向径上所有点密度的平均值,为旋转椭球在该纬度的“纬向密度”(见图2).

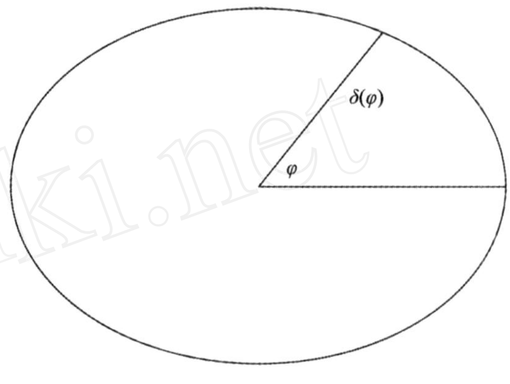

图2　纬向密度椭球

Fig. 2　Latitudinal density ellipsoid

在文献[5]和文献[13]按照“极点重力纬向密度积分公式”和“赤道重力纬向密度积分公式”解出了地球纬向正常密度函数 $\delta = \delta(B)$,但是,在计算该函数中的系数 δ_E 和 δ_P 时,由于对积分变换方法考虑不周,因而导致了较大的数值偏差.作者等在文献[8]中改进了求解地球纬向正常密度函数的积分变换方法,对 δ_E 和 δ_P 的数值进行了修正.

参见文献[8],设极点和赤道的“纬向密度”分别为 δ_P 和 δ_E,在“准等位条件”的约束下,则旋转椭球纬向密度的函数形式为

$$\delta(\phi) = 5.496247\cos^2\phi + 5.539862\sin^2\phi. \tag{7}$$

如前所述,研究水准椭球的密度问题,就是要求解出满足1980大地参考系统的基本常数 (a, b, GM, ω) 和表面重力等位条件、且又能代表地球基本特征的“密度水准椭球”.显然,(7)式并不能代表地球的基本特征.因而,(7)式只有数学意义,没有地球物理学意义.

虽然“纬向密度椭球”没有地球物理学意义,但是,将“参数椭球”、“准等位条件”和“纬向密度椭球”结合起来,就能够求解出满足 (a, b, GM, ω) 和表面重力“准等位条件”、且又能代表地球基本特征的“似水准椭球”.

5 似水准椭球

“似水准椭球”的模式为“内匀外纬”,内部地核为匀质密度 δ_i ,外部地幔(含地壳)为纬向密度 $\delta_e(\phi)$,参见图三,是参数椭球、纬向密度椭球、准等位条件、和地球模型 $JB(A)$[19]的结合.

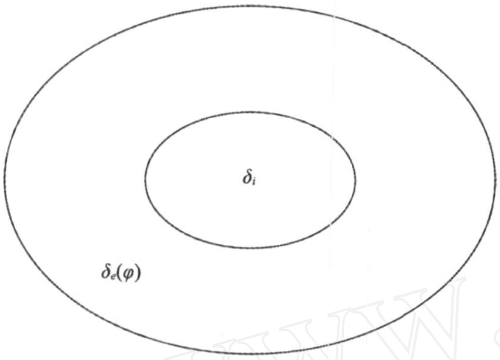

图 3 似水准椭球

Fig. 3 Quasi-level ellipsoid

由 $JB(A)$ 模型可算得地幔(含地壳)平均密度为 $\delta_e = 4.658(\mathrm{g/cm^3})$ 、椭球核幔边界的深度参数为 $n = 0.544872$,由(3)式可算得地核椭球的匀质密度为 $\delta_i = 9.968\ (\mathrm{g/cm^3})$.

于是,作者等在文献[11]和[12]中求解出了满足 (a, b, GM, ω) 和表面重力“准等位条件”、且又能代表地球基本特征的“似水准椭球”的地幔的纬向正常密度分布函数为[11]:

$$\delta_e(\phi) = 4.650852\cos^2\phi + 4.666229\sin^2\phi\,(\mathrm{g/cm^3}) . \quad (8)$$

6 讨 论

虽然“似水准椭球”已接近了我们的研究目标——“密度水准椭球”,但接近目标并不等于达到目标,而最后的一步往往是最难的一步. 对于“参数椭球”而言,表面的“准等位条件”和等位条件并不是无关的. 作者等在文献[7]中严格证明:在极点和赤道重力位相等的约束条件下,如果放弃“分层”、即当参数椭球内的界面无限趋向参数椭球表面时,参数椭球趋向“匀质等位椭球”——“麦克劳林椭球”. 也就是说,参数椭球的“准等位条件”在不分层的极限状态下会趋向等位条件[7]. 但是,对于“纬向密度椭球”来说,满足等位条件在数学上要复杂的多,作者曾多次尝试这一工作,但未能如愿,借此机会提请同行关注. 也许可以这样说,谁能求解出满足 (a, b, GM, ω) 和椭球表面重力等位条件、而不仅是“准等位条件”、且又能代表地球基本特征的纬向密度分布函数,谁就获取了地球重力学理论研究中一颗闪光的宝石.

近年来,作者等已将对“水准椭球密度问题”的研究逐步转化为对“板块运动机制问题”的研究,并取得了一些初步成果[13~16],由此可见研究“水准椭球密度问题”的重要意义. 让我们再次引用莫里茨教授在文献[2]的序言中的论述:“1980 大地参考系统采用等位椭球(水准椭球)作为参照面,因此很自然地会提出这样一个问题,即这一椭球所相应的物质分布构形. 类似地,也要求研究地球物质分布的异常,考虑重力场与地球内部的密度分布之间不可分割的联系”[2].

参 考 文 献 (References):

[1] Ilk K H, Flury J, *et al*. Mass transport and mass distribution in the Earth system. proposal for a german priority research program. GOCE-projektburo deutchland, technische universitat munchen[M]. GeoForschungsZentrum Potsdam, Februar 2004.

[2] 莫里茨 H. 地球形状——理论大地测量学和地球内部物理学[M]. 陈俊勇、左传惠译,北京:测绘出版社,1992,92~152.

[3] 郝晓光. 对重力测量纬度改正概念的修正[J]. 地壳形变与地震,1996,16(3):8~13.

[4] 郝晓光. 参数椭球表面的重力[J]. 地球科学,1997,22(2):223~226.

[5] 郝晓光,许厚泽. 水准椭球的纬向密度分布[J]. 测绘学报,1998,27(4):345~351.

[6] 郝晓光,许厚泽,刘大杰. 地球的重力聚点及参数椭球的地球重力学性质[J]. 测绘学报,2000,29(2):109~113.

[7] 郝晓光,许厚泽,刘大杰. 参数椭球数学性质的初步研究[J]. 测绘学报,2001,30(3):203~207.

[8] 郝晓光,刘根友. 地球纬向正常密度函数系数的修正[J]. 大地测量与地球动力学,2002,22(2):53~56.

[9] 郝晓光,刘大杰. 参数椭球的准等位条件[J]. 同济大学学报(自然科学版),2004,32(1):86~89.

[10] 郝晓光,刘根友. 参数椭球的密度分布研究[J]. 测绘科学,2004,29(2):31~33.

[11] 郝晓光,刘根友. 地幔纬向正常密度函数[J]. 测绘学报,2004,33(2):105~109.

[12] 郝晓光,刘根友. 似水准椭球[J]. 大地测量与地球动力学,2005,25(3):45~49.

[13] 郝晓光,许厚泽,刘大杰. 地球的密度扁率与纬向正常密度假说[J]. 中国科学 D 辑,2000,30(4):436~441.

[14] 郝晓光. 板块运动的纬向重力模式[J]. 同济大学学报(自然科学版),2001,29(6):653~656.

[15] 郝晓光,刘根友. 板块运动地球重力学机制研究[J]. 地学前

缘,2004,11(1):84.
[16] 郝晓光,方剑,刘根友.纬向正常密度假说与内波假说的比较[J].地球物理学进展,2005,20(4):991～996.
[17] Moritz H. Geodetic reference system 1980[J]. In., C. C. Tscherning, The Geodesist's Handbook, Bull. Geod., 1984, 58:388～398..
[18] 郭俊义.物理大地测量学基础[M].武汉:武汉测绘科技大学出版社,1994,117～163.
[19] 杰弗里斯 H.地球——它的起源和物理结构[M].张焕志、李致森译,北京:科学出版社,1985,169～175.