中国科学（D 辑）
第 30 卷 第 4 期 SCIENCE IN CHINA (Series D) 2000 年 8 月

地球的密度扁率与纬向正常密度假说*

郝晓光[①②] 许厚泽[①] 刘大杰[③]

(①中国科学院测量与地球物理研究所，武汉 430077；②同济大学测量系，上海 200092)

摘要 给出了水准椭球的“纬向密度”和“密度扁率”的定义，推导出极点重力与赤道重力的纬向密度积分公式. 按照水准椭球的极点重力条件和赤道重力条件，求解出水准椭球的“纬向密度分布函数”，从数学上证明了地球的赤道纬向密度大于极点纬向密度，并初步计算出地球的密度扁率为 1 / 322，进而提出了“地球纬向正常密度假说”，为研究和探讨大陆漂移、地幔对流、海底扩张等问题的地球重力学成因做好了理论准备.

关键词 纬向密度 密度扁率 地球纬向正常密度假说

1687 年，Newton 首先提出地球是一个椭球的观点，从数学上证明了地球是一个赤道半径大于极点半径的扁椭球，并计算出地球的几何扁率 $f=(a-b)/a$ 为 1/239. 然而 1716 年 Cassini 父子根据 Picard 和他们自己不太精确的弧度测量结果却断定地球是一个极点半径大于赤道半径的长椭球. 这就发生了科学史上著名的“地长说”与“地扁说”之争. 为了解决这个争端，巴黎科学院于 1735 年派遣两支测量队，一队去北极圈附近的 Lappland，另一队去赤道附近的 Kito，进行精密的弧度测量. 结果证明，子午线的每度弧长在赤道附近最小、巴黎附近居中、北极附近最大；完全证明了“地扁说”的正确性. Newton 的“地扁说”是正确的，但他计算出的扁率值 1/239 却不那么精确. 在 Newton 后不几年，Huygens 单独给出了另一扁率值 1/577，人们试图从理论上和观测上解释其差异，但没有结果. 此后，又出现了一些关于地球扁率的结果: 1789 年 Legendre 的 1/318，1841 年 Bessel 的 1/299，1866 年 Clarke 的 1/295，1909 年 Hayford 的 1/297，1948 年 Bullard 的 1/297.34；地球的几何扁率现已精确地得到了确认.

研究地球的形状和密度，是地球重力学的两项基本任务. 在地球重力学中，关于地球形状的理论与方法已得到充分发展，而关于地球密度的理论与方法则显得比较薄弱. 传统的 Stokes 理论与 Molodensky 理论都是以回避地球密度分布为数学前提来研究地球形状的，地球形状学几乎成了地球重力学的同义词. 伴随空间大地测量技术的迅速发展和地球形状学理论的不断完善，地球形状不应该再是地球重力学永远不变的理论主题，而关于地球整体密度分布方式的大陆漂移、地幔对流、海底扩张等新问题的出现，也要求地球重力学的研究重点从地球形状转移到地球密度上来.

最早用于研究地球密度的地球重力学理论，是 Clairaut 于 1743 年发表的平衡形状理论. Legendre 和 Laplace 于 1825 年根据这个理论得到了地球内部的密度定律. 此后，Darwin 于 1884 年、Roche 于 1888 年、Wiechert 于 1897 年、Bullard 于 1945 年、Bullen 于 1975 年，也分别得到了类似的密度定律. 但是这些密度定律得到的都是地球的径向密度分布 $\delta=\delta(r)$，而没有

1999-07-25 收稿
* 中国科学院院长基金，同济大学博士后基金及国家自然科学基金（批准号: 49874016）资助项目

得到地球的纬向密度分布 $\delta=\delta(B)$，使得地球重力学理论在研究地球纬向密度方面出现了空白.

研究地球的纬向密度分布对认识地球物质的纬向迁移有重要意义. 对于探讨大陆漂移、地幔对流、海底扩张等问题的地球重力学成因来说，地球物质的纬向分布和纬向迁移比起地球物质的径向分布和径向迁移具有更直接的联系.

由于地球密度与纬度的对应关系在前人的研究中一直没有得到确定，为了寻找一个新的出发点，我们由以上地球几何扁率的研究历史，联想到地球是否也存在着“密度扁率”. 如果存在，地球的密度扁率该如何表示呢?

设椭球内有一个扁率相同的相似椭球族由椭球表面连续向地心收缩，而椭球表面任一点的向径则穿过这个相似椭球族的所有相似椭球面到达地心. 由于该向径上所有点在各相似椭球面上的纬度是相同的，我们定义，该向径上所有点的密度的平均值为椭球在该点的“纬向密度”.

由上述定义可见，纬向密度概念把椭球体内的密度抽象到(而不是压缩到)椭球表面上，在椭球体内密度与椭球表面纬度之间建立起对应的关系，使得我们用简明的数学方法定量地研究地球密度的纬向分布成为可能.

有了纬向密度概念，就有了密度扁率概念. 若 δ_E 和 δ_P 分别为赤道和极点的纬向密度，则密度扁率为 $f'=(\delta_E-\delta_P)/\delta_E$. 按照地球重力学中几何量与物理量密切相关的传统，对应地球几何扁率的“地长说”与“地扁说”之争，地球的密度扁率也应存在着“地长说”($\delta_E<\delta_P$)与“地扁说”($\delta_E>\delta_P$)的区别.

本文推导出极点重力与赤道重力的纬向密度积分公式. 按照水准椭球的极点重力条件和赤道重力条件，求解出水准椭球的“纬向密度分布函数”，从数学上证明了地球的赤道纬向密度大于极点纬向密度($\delta_E>\delta_P$)，并初步计算出地球的密度扁率为 1/322，进而提出了“地球纬向正常密度假说”.

1　纬向密度分布函数

为了研究地球的纬向密度，应该首先研究水准椭球的纬向密度. Moritz 说: “水准椭球内任何合理的物质分布是不知道的，但水准椭球的非均匀、非平衡的物质分布是一定存在的”[1]. Iona 的研究表明，匀质椭球不可能像水准椭球那样，在极点和赤道产生那么大的重力差[2]. Maialle 等人[3]用分层匀质的椭球来计算极点和赤道的重力，并与水准椭球进行比较，取得了较好的结果. 郝晓光[4]的研究表明，水准椭球的非匀质密度是按纬度分布的.

Pizzetti 于 1894 年将水准椭球分解为“内体”和“表层”两部分. 内体是 Maclaurin 椭球，表层为紧紧包裹在 Maclaurin 椭球外的单层质面[1]. Maclaurin 椭球为匀质等位椭球，其质量 M_{MC} 与角速度 ω 需满足以下关系[5]:

$$M_{MC}=\frac{2\omega^2 a^3 e'^3}{3G((3+e'^2)\arctan e'-3e')\sqrt{1+e'^2}}, \tag{1}$$

式中 $e'^2=\dfrac{a^2-b^2}{b^2}$，$G$ 为万有引力常数.

在地球重力学中，Stokes 常数为(a, b, M, ω)，若将 1980 大地参考系统中的常数(a,b,ω)代入(1)式进行计算，所得出的M_{MC}将大于水准椭球的质量 M. 因此在 Pizzetti 模型中，为满足 Stokes 定理，其表层的质量必须是“负”的，“负质量”的大小应恰好抵消内体多余的质量$(M_{MC}-M)$. 以下为表层密度分布公式[5]：

$$\mu(B)=\frac{(M-M_{MC})\sqrt{a^2\cos^2 B+b^2\sin^2 B}}{4\pi a^2 b}. \tag{2}$$

在极点和赤道：

$$\mu_P=\mu(90^\circ)=\frac{M-M_{MC}}{4\pi a^2},\quad \mu_E=\mu(0^\circ)=\frac{M-M_{MC}}{4\pi ab}. \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式得

$$\mu(B)=-\sqrt{\mu_E^2\cos^2 B+\mu_P^2\sin^2 B}. \tag{4}$$

由于 Pizzetti 模型的表层为“负密度”，这在物理上是不现实的. 用 Moritz 的话来说，这种密度分布对地球肯定是“不合理的”. 因此，我们设想用本文定义的纬向密度来构造水准椭球的“纬向密度模型”，以研究真实地球的密度分布.

Pizzetti 模型在物理上是不现实的，但在数学上非常成功. 纬向密度模型以 Pizzetti 模型为基础，扬其数学之长、避其物理之短.

因 Maclaurin 椭球为匀质椭球，故纬向密度模型的函数形式应与 Pizzetti 模型的内体无关，而只与其表层相关. 由于 Pizzetti 模型的表层密度是按纬度分布的，而纬向密度也是按纬度分布的，故可设纬向密度模型的函数形式继承 Pizzetti 模型表层密度的函数形式. 于是，对照(4)式可得

$$\delta(B)=\sqrt{\delta_E^2\cos^2 B+\delta_P^2\sin^2 B}. \tag{5}$$

以上即纬向密度模型的函数形式，其中赤道纬向密度δ_E和极点纬向密度δ_P是两个待定常数. 与(4)式不同的是，$\mu(B)$是面密度，而$\delta(B)$则是体密度，是椭球某一向径上所有点的密度的平均值，是一种等效密度. 另外，Pizzetti 模型的表面是等位的，但(5)式却不一定能保证这一点. 为此，我们在下面将以水准椭球极点和赤道的重力作为约束条件来解算(5)式中的待定常数δ_E和δ_P，从而使得纬向密度模型逼近水准椭球.

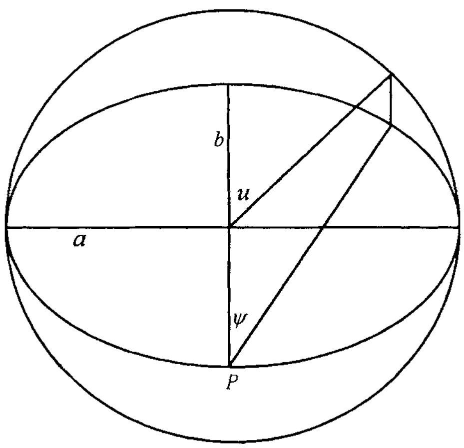

图 1 极原点坐标系

P 为原点，*u* 为归化纬度余角，*ψ* 为极距

2 极点重力的纬向密度积分公式

在(5)式中，B 为地理纬度，若 u 为归化纬度的余角，由三角函数代换将(5)式变为

$$\delta(u)=\sqrt{\frac{\delta_E^2 b^2\sin^2 u+\delta_P^2 a^2\cos^2 u}{b^2\sin^2 u+a^2\cos^2 u}}. \tag{6}$$

参见图 1，设球坐标 $P-r\psi\lambda$ 以椭球极点为原点、短轴为极轴，则椭球面方程为

$$r_0 = \frac{2b(1+e'^2)\cos\psi}{1+e'^2\cos^2\psi}. \tag{7}$$

因椭球极点处的离心力为零，则极点重力(引力)为

$$\gamma_\mathrm{p} = G\int_\tau \delta \frac{r\cos\psi}{r^3}\mathrm{d}\tau = 4\pi Gb(1+e'^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{\cos^2\psi\sin\psi}{1+e'^2\cos^2\psi}\mathrm{d}\psi. \tag{8}$$

由三角函数代换和微分变换可得

$$\gamma_\mathrm{p} = 2\pi Gb(1+e'^2)\left(\int_0^1 \frac{\delta(x)(1+x)^2\mathrm{d}x}{(e'^2(1-x^2)+2x+2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^1 \frac{\delta(x)(1-x)^2\mathrm{d}x}{(e'^2(1-x)^2-2x+2)^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{9}$$

在(9)式中， $x=\cos u$, $\delta(x)=\delta(\cos u)$ 可由(6)式给出:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\delta_\mathrm{E}^2 b^2(1-x^2)+\delta_\mathrm{P}^2 a^2 x^2}{b^2(1-x^2)+a^2x^2}}. \tag{10}$$

3　赤道重力的纬向密度积分公式

参见图 2, 设球坐标 $E-r\psi\lambda$ 以椭球赤道上一点为原点、长轴为极轴, 则椭球面方程为

$$r_0 = 2a\cos\psi(e'^2\sin^2\psi\sin^2\lambda-1). \tag{11}$$

于是，椭球赤道重力为

$$\gamma_\mathrm{e} = G\int_\tau \delta\frac{r\cos\psi}{r^3}\mathrm{d}\tau - \omega^2 a$$
$$= 4\pi Ga\int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{\cos^2\psi\sin\psi}{\sqrt{1+e'^2\sin^2\psi}}\mathrm{d}\psi - \omega^2 a. \tag{12}$$

由三角函数代换和微分变换可得

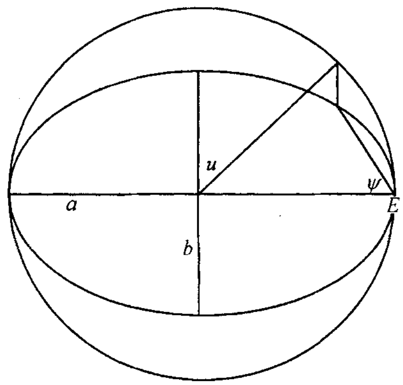

图 2　赤道原点坐标系

E 为原点, u 为归化纬度余角, ψ 为极距

$$\gamma_\mathrm{e} = 4\pi G\frac{b^2}{a}\left(\int_0^1 \frac{\delta(y)\ A_W^{5/2}\mathrm{d}y}{(1+y)^2\sqrt{1+e'^2-e'^2A_\mathrm{W}}} + \int_0^1 \frac{\delta(y)\ A_E^{5/2}\mathrm{d}y}{(1-y)^2\sqrt{1+e'^2-e'^2A_\mathrm{E}}}\right) - \omega^2 a, \tag{13}$$

式中 $A_\mathrm{W} = \dfrac{(1+e'^2)(1+y)}{2+e'^2(1+y)}$， $A_\mathrm{E} = \dfrac{(1+e'^2)(1-y)}{2+e'^2(1-y)}$. 在(13)式中, $y=\sin u$, $\delta(y)=\delta(\sin u)$ 可由(6)式给出:

$$\delta(y) = \sqrt{\frac{\delta_\mathrm{E}^2 b^2 y^2 + \delta_\mathrm{P}^2 a^2(1-y^2)}{b^2y^2+a^2(1-y^2)}}. \tag{14}$$

4　求解待定常数

为了求解待定常数 δ_E 和 δ_P，令 $\kappa=\delta_\mathrm{P}/\delta_\mathrm{E}$. 显然，只要求解出 δ_E 和κ, 便可算出 δ_P. 于是由(10)和(14)式可得

$$\delta(x)=\delta_{\rm E}\sqrt{\frac{b^2(1-x^2)+\kappa^2a^2x^2}{b^2(1-x^2)+a^2x^2}}=\delta_{\rm E}\kappa_x, \tag{15}$$

$$\delta(y)=\delta_{\rm E}\sqrt{\frac{b^2y^2+\kappa^2a^2(1-y^2)}{b^2y^2+a^2(1-y^2)}}=\delta_{\rm E}\kappa_y. \tag{16}$$

将(15)和(16)式代入“极点重力的纬向密度积分公式”(9)式和“赤道重力的纬向密度积分公式”(13)式、并做简单整理可得

$$\frac{\gamma_{\rm P}}{1+e'^2}\left(\int_0^1\frac{\kappa_yA_{\rm W}^{5/2}{\rm d}y}{(1+y)^2\sqrt{1+e'^2-e'^2A_{\rm W}}}+\int_0^1\frac{\kappa_yA_{\rm E}^{5/2}{\rm d}y}{(1-y)^2\sqrt{1+e'^2-e'^2A_{\rm E}}}\right)$$
$$=\frac{a(\gamma_{\rm e}+\omega^2a)}{2b}\left(\int_0^1\frac{\kappa_x(1+x)^2{\rm d}x}{(e'^2(1-x^2)+2x+2)^{3/2}}+\int_0^1\frac{\kappa_x(1-x)^2{\rm d}x}{(e'^2(1-x)^2-2x+2)^{3/2}}\right), \tag{17}$$

$$\delta_{\rm E}=\frac{\gamma_{\rm P}}{2\pi bG(1+e'^2)}\left(\int_0^1\frac{\kappa_x(1+x)^2{\rm d}x}{(e'^2(1-x^2)+2x+2)^{3/2}}+\int_0^1\frac{\kappa_x(1-x)^2{\rm d}x}{(e'^2(1-x)^2-2x+2)^{3/2}}\right)^{-1}. \tag{18}$$

由(17)式可见，式中消去了$\delta_{\rm E}$，只有一个待定常数κ，故可直接算出κ值；将κ值代入(18)式，就可算出$\delta_{\rm E}$值；再由$\kappa=\delta_{\rm P}/\delta_{\rm E}$，便可算出$\delta_{\rm P}$值. 所以，采用数值积分方法由联立方程(17)和(18)式解算出我们所要求的待定常数为

$$\delta_{\rm E}=5.526\ 625({\rm g/cm^3}),\quad \delta_{\rm P}=5.509\,460\,({\rm g/cm^3}). \tag{19}$$

常数$a=637\,813\ 700\,({\rm cm})$, $b=635\,675\,200\,({\rm cm})$和$\omega=7\,292\ 115\times10^{-11}\,({\rm s})$满足 1980 大地参考系统，常数$\gamma_{\rm p}=983.218\ 637\,({\rm cm/s^2})$和$\gamma_{\rm e}=978.032\ 726({\rm cm/s^2})$为纬向密度模型的约束条件，是水准椭球极点和赤道的重力值[4].

5 讨论

由(19)式可算出水准椭球的密度扁率为

$$f'=(\delta_{\rm E}-\delta_{\rm P})/\delta_{\rm E}=1/322. \tag{20}$$

将(19)式代入(5)式，可得到水准椭球的纬向密度分布函数为

$$\delta(B)=\sqrt{5.526\,625^2\cos^2B+5.509\,460^2\sin^2B}. \tag{21}$$

联立方程(17)和(18)式的约束条件仅仅是水准椭球极点和赤道的重力值，而不是整个水准椭球表面的重力值，所以(20)式给出的 1/322 这个密度扁率值并不是精确的. 这项工作才刚刚开始，随着研究的深入，应该得到越来越精确的密度扁率值. 实际上，开始求出的几何扁率值也是不太精确的，在不断求解几何扁率的过程中，产生了一些新的理论，促进了地球重力学的发展. 希望在进一步求解密度扁率的过程中，也能产生新的理论，对地球重力学有所贡献.

待定常数$\delta_{\rm E}$和$\delta_{\rm P}$是采用正演方法得到的，故不存在反演方法中的非惟一性问题. 按照地球重力学的传统，水准椭球的纬向密度可被当作地球的纬向正常密度，就像水准椭球的重力被当作地球的正常重力一样. 因此(21)式定量地表达了一种观点：地球的纬向正常密度是按纬度规则分布的，由极点向赤道收缩，纬度越高，纬向密度越小，这是地球的固有特性. 我们把这种观点称为“地球纬向正常密度假说”.

如果地球的纬向密度是按(21)式正常分布的，那么地球的物质分布状态是稳定的；而如果地球的纬向密度是异常分布的，那么地球的物质分布状态是不稳定的，则地球的物质将会发生迁移和调整来达到(21)式的要求．由此可见，地球纬向正常密度假说的提出为研究和探讨大陆漂移、地幔对流、海底扩张等问题的地球重力学成因做好了理论准备．

致谢　本研究得到武汉测绘科技大学宁津生院士、中国地震局陈鑫连研究员等专家的热情鼓励，在此表示衷心感谢。

参　考　文　献

1　Moritz H 著．地球形状：理论大地测量学和地球内部物理学．陈俊勇，左传惠译．北京：测绘出版社，1992. 92~107

2　Iona M. Why is g larger at the poles. Am J Phys, 1978, 46: 790~791

3　Maialle M Z, Hipolito O. Acceleration of gravity for the earth model as an ellipsoidal mass with nonuniform density. Am J Phys, 1996, 64: 434~436

4　郝晓光．对重力测量纬度改正概念的修正．地壳形变与地震，1996, 16(3): 8~13

5　郭俊义．物理大地测量学基础．武汉：武汉测绘科技大学出版社，1994. 135~136