

# 地球的重力聚点与参数椭球的 地球重力学性质

郝晓光<sup>1,2</sup>, 许厚泽<sup>1</sup>, 刘大杰<sup>2</sup>

(1. 中国科学院测量与地球物理研究所, 湖北 武汉 430077; 2. 同济大学 测量与国土信息工程系, 上海 200092)

## Gravity Assembly Points of the Earth and Gravitative Features of the Parameter Ellipsoid

HAO Xiao-guang<sup>1,2</sup>, XU Hou-ze<sup>1</sup>, LIU Da-jie<sup>2</sup>

(1. Institute of Geodesy and Geophysics, CAS, Wuhan 430077, China;

2. Department of Surveying and Geomatics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract** In this paper, gravity assembly points have been discovered at 35°21'32" latitude on surface of the Earth. Then, theorem of density distribution, theorem of matter flow and theorem of gravity assembly point are first presented.

**Key words:** parameter ellipsoid; gravity assembly point; theorem of density distribution; theorem of matter flow; theorem of gravity assembly point

**摘 要:** 本文研究了“参数椭球”的地球重力学性质, 在纬度 35°21'32" 处, 发现了地球的“重力聚点”, 给出了适用于地球的“密度分布定理”、“物质流动定理”和“重力聚点定理”; 为研究地球密度的整体变化, 提供了有用的理论工具。

**关键词:** 参数椭球; 重力聚点; 密度分布定理; 物质流动定理; 重力聚点定理

## 1 前 言

研究地球的形状和密度, 是地球重力学的两项基本任务。应用重力资料研究地球形状的理论与方法已得到充分发展, 相比之下, 应用重力资料研究地球密度的理论与方法显得比较薄弱。椭球的引力问题比较复杂。牛顿用了几个球体的比例方法, 仅仅只求出了匀质椭球上赤道与极点的引力比例。后来, 经过麦克劳令(Maclaurin)、雅可比

(Jacobi)、拉格朗日(Lagrange)、拉普拉斯(Laplace)、艾复来(Ivory)及恰勒(Chasles)等人的研究, 完备解决了匀质旋转椭球的引力问题<sup>[3]</sup>。

然而, 地球并不是匀质的, 但大体上是“分层”的。所以, 以“匀质旋转椭球”为基础, 研究“分层旋转椭球”的引力问题, 在地球重力学中有重要意义。本文作者在文献[1]中推导了带密度参数和深度参数的旋转椭球表面重力的封闭公式, 首次提出了一种“分层旋转椭球”——“参数椭球”的概

收稿日期: 1999-03-15; 截稿日期: 1999-10-08

基金项目: 中国科学院院长基金; 同济大学博士后基金; 国家自然科学基金资助项目(49874016)

作者简介: 郝晓光(1958-), 男, 上海人, 中国科学院测量与地球物理研究所高级工程师, 现主要从事地球重力学的理论与应用研究。

念。在此基础上,本文深入研究了“参数椭球”的地球重力学性质;在纬度 35°21'32" 处,发现了地球的“重力聚点”;给出了适用于地球的“密度分布定理”、“物质流动定理”和“重力聚点定理”,为研究地球密度的整体变化,提供了有用的理论工具。

## 2 参数椭球表面的重力

由文献[1]可知,参数椭球由大、小两个相似的旋转椭球构成。在球坐标下,它们的表面方程分别为

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \quad \rho_n^2 = \frac{a_n^2 b_n^2}{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}$$

式中  $a, b$  和  $a_n, b_n$  分别为大、小旋转椭球的长、短半径,  $\theta$  为极距。由文献[1]可知

$$a_n = na, b_n = nb, 0 < n < 1$$

$$e_n^2 = \frac{a_n^2 - b_n^2}{b_n^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = e^2$$

由文献[1]和图 1 可知,  $\delta_i$  为参数椭球的“内密度”,  $\delta_e$  为“外密度”。若  $T_n$  为小椭球体积,  $T$  为大椭球体积,  $M$  为参数椭球的总质量,  $\delta_0$  为参数椭球的平均密度, 则

$$T_n = n^3 T, \delta_n^3 T + \delta_e T (1 - n^3) = M$$

$$\delta_n^3 + \delta_e (1 - n^3) = \frac{M}{T} = \delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b}$$

得

$$\delta_i = \frac{1}{n^3} (\delta_0 - \delta_e) + \delta_e = \delta_i(n, \delta_e) \quad (1)$$

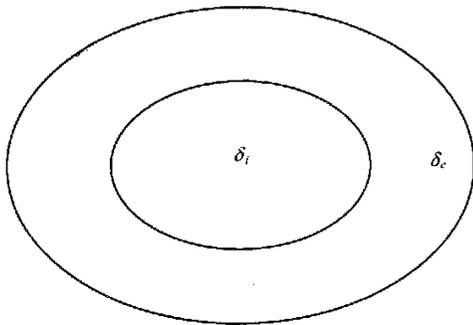


图 1  
Fig 1

因为参数椭球的总质量  $M$  是不变的, 所以参数椭球有两个参数,  $n$  为内密度与外密度分界面的“深度参数”, 参数椭球的外密度  $\delta_e$  为“密度参数”; 参数椭球的内密度  $\delta_i$  为  $n$  和  $\delta_e$  的函数。由文献[1]可知, 参数椭球表面重力公式为<sup>[1]</sup>

$$g = \frac{(P - Q) a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} = g(B, n, \delta_e) \quad (2)$$

式(2)中

$$P = 2\pi f \frac{1+e^2}{e^3} \left[ \frac{(\delta_i - \delta_e)}{n^3} (\arctan e_c - \frac{e_c}{1+e_c^2}) + \delta_e (\arctan e - \frac{e}{1+e^2}) \right] \quad (3)$$

$$Q = 4\pi f \frac{1+e^2}{e^3} \left[ \frac{(\delta_i - \delta_e)}{n^3} (e_c - \arctan e_c) + \delta_e (e - \arctan e) \right] \quad (4)$$

式(3)、式(4)中

$$c = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2) \right]$$

$$e_c = \frac{nbe}{n^2 b^2 + c}, \rho^2 = \frac{a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}$$

$B$  为纬度。

## 3 “密度分布定理”与“物质流动定理”

由文献[2]可知, 匀质椭球表面重力公式为<sup>[2]</sup>

$$g_0 = \frac{a^2 g_e \cos^2 B + b^2 g_p \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} \quad (5)$$

式(5)中, 匀质椭球赤道重力  $g_e$  和极点重力  $g_p$  的公式为

$$g_e = \frac{fM}{ab} \left[ \frac{3}{2e^2} \left( \frac{1+e^2}{e} \arctan e - 1 \right) - m \right]$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{fM} \quad (6)$$

$$g_p = \frac{fM}{a^2} \frac{3(1+e^2)}{e^2} \left( 1 - \frac{\arctan e}{e} \right) \quad (7)$$

由物理大地测量学可知, 水准椭球表面重力的索米里安公式为<sup>[4]</sup>

$$Y_0 = \frac{a Y_e \cos^2 B + b Y_p \sin^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} \quad (8)$$

式(8)中, 水准椭球赤道重力  $Y_e$  与极点重力  $Y_p$  的公式为

$$Y_e = \frac{fM}{ab} \left\{ 1 + m \frac{6(e - \arctan e) - 2e^3}{3[(3+e^2)\arctan e - 3e]} \right\} \quad (9)$$

$$Y_p = \frac{fM}{a^2} \left\{ 1 + m \frac{6(1+e)(e - \arctan e) - 2e^3}{3[(3+e^2)\arctan e - 3e]} \right\} \quad (10)$$

1980 大地参考系统的 4 个基本常数为

$$a = 637813700 \text{ (cm)}, b = 635675200 \text{ (cm)}$$

$$fM = 3986005 \times 10^{14} \text{ (cm}^3/\text{s}^2\text{)},$$

$$\omega = 7292115 \times 10^{-11} \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

将以上常数代入式(6)、式(7)、式(9)、式(10)可算得匀质椭球与水准椭球的赤道重力、极点重力分别为

$$\left. \begin{aligned} g_e &= 978\,412\,041 \text{ (cm/s}^2\text{)} \\ g_p &= 982\,462\,550 \text{ (cm/s}^2\text{)} \\ \gamma_e &= 978\,032\,726 \text{ (cm/s}^2\text{)} \\ \gamma_p &= 983\,218\,637 \text{ (cm/s}^2\text{)} \end{aligned} \right\} (11)$$

而参数椭球的平均密度则为

$$\delta_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b^2} = 5\,516\,968 \text{ (g/cm}^3\text{)}$$

式(2)、式(5)、式(8)是参数椭球、匀质椭球、水准椭球的表面重力公式。由参数椭球的定义可知,当  $n = 1, 0$  或  $\delta = \delta_0$  时,参数椭球退化为匀质椭球;也就是说,匀质椭球是参数椭球的特例。注意,“密度参数” $\delta$  的量纲为  $(\text{g/cm}^3)$ ,“深度参数” $n$  为无量纲参数。

由式(11)得匀质椭球与水准椭球的重力扁率分别为

$$\left. \begin{aligned} \beta_g &= \frac{g_p - g_e}{g_e} = 4.41 \times 10^{-3} \\ \beta_\gamma &= \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = 5.30 \times 10^{-3} \end{aligned} \right\} (12)$$

分别令  $B = 0^\circ, B = 90^\circ$ ; 由式(2)可得参数椭球的赤道重力、极点重力和重力扁率分别为

$$\left. \begin{aligned} g_e^\delta &= (P_e - \omega)^2 \\ g_p^\delta &= Q_p b \\ \beta_g^\delta &= \frac{g_p^\delta - g_e^\delta}{g_e^\delta} = \frac{Q_p b - (P_e - \omega)^2}{(P_e - \omega)^2} \end{aligned} \right\} (13)$$

由式(3)、式(4)可得式(13)中

$$\left. \begin{aligned} P_e &= 2\pi\gamma \frac{1+e^2}{e^3 n^3} [(\delta_0 - \delta)(\arctan e_a - \frac{e_a}{1+e_a^2}) + n^3 \delta_0 (\arctan e - \frac{e}{1+e^2})] \\ c_a &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2) \right] \\ e_a &= \frac{nbe}{n^2 b^2 + c_a} \\ Q_p &= 4\pi\gamma \frac{1+e^2}{e^3 n^3} [(\delta_0 - \delta)(e_b - \arctan e_b) + n^3 \delta_0 (e - \arctan e)] \\ c_b &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2) \right] \\ e_b &= \frac{nbe}{n^2 b^2 + c_b} \end{aligned} \right\} (14)$$

将数值不同的深度参数  $n$  和密度参数  $\delta$  以及 1980 大地参考系统的 4 个基本常数代入式

(13)、式(14)、式(15),便可算得参数椭球的重力扁率  $\beta_g^\delta$  (如图 2 所示)。

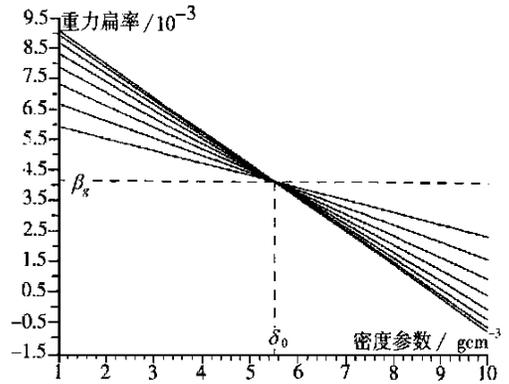


图 2

Fig. 2

由图 2 可见,当密度参数  $\delta$  大于平均密度  $\delta_0$  时,参数椭球的重力扁率  $\beta_g^\delta$  小于匀质椭球的重力扁率  $\beta_g$ ; 当密度参数  $\delta$  小于平均密度  $\delta_0$  时,参数椭球的重力扁率  $\beta_g^\delta$  大于匀质椭球的重力扁率  $\beta_g$ 。又因总质量  $M$  是不变的,故由式(1)可知,当外密度  $\delta_e$  大于平均密度  $\delta_0$  时,内密度  $\delta_i$  小于平均密度  $\delta_0$ ; 当外密度  $\delta_e$  小于平均密度  $\delta_0$  时,内密度  $\delta_i$  大于平均密度  $\delta_0$ 。由此我们得到分层旋转椭球的“密度分布定理”。

密度分布定理: 当分层椭球的重力扁率大于匀质椭球的重力扁率时,其内密度大于外密度; 当分层椭球的重力扁率小于匀质椭球的重力扁率时,其内密度小于外密度。

为作图之便,选取深度参数分别为  $n = 0.1, 0.2, \dots, 0.8$  (深度参数可取  $0 < n < 1$  的任意值), 实算结果为  $n = 0.1$  的重力扁率直线的斜率最大,依次排列,  $n = 0.8$  的重力扁率直线的斜率最小。因此,由图 2 可见,参数椭球的重力扁率  $\beta_g^\delta$  与密度参数  $\delta$  成反比,而反比的比率(重力扁率直线的斜率)又与深度参数  $n$  成反比。

由于参数椭球的密度参数  $\delta$  是参数椭球的“外密度”,又由于密度参数  $\delta$  与重力扁率的反比关系; 所以,当“外密度”增大时(椭球的物质由内向外流动),重力扁率减小; 反之,当“外密度”减小时(椭球的物质由外向内流动),重力扁率增大。由此我们得到分层旋转椭球的“物质流动定理”。

物质流动定理: 当分层椭球的物质由内向外流动时,其重力扁率减小; 当分层椭球的物质由外向内流动时,其重力扁率增大。

由于参数椭球满足 1980 大地参考系统四基

本常数  $(a, b, fM, \omega)$ , 又由于地球象参数椭球一样是“分层”的; 且由式(11)可见, 水准椭球的重力扁率值被包含在图 2 中的参数椭球重力扁率的值域内; 故可认为以上“密度分布定理”和“物质流动定理”对地球也是适用的。

#### 4 “重力聚点”与“重力聚点定理”

匀质椭球的表面重力可由式(5)算得, 水准椭球的表面重力可由式(8)算得; 若选取数值不同的深度参数与密度参数  $(n, \delta)$ , 便可由式(2)算得参数椭球族的表面重力。

为了与图 2 中选取的参数相对应, 选取深度参数与密度参数  $(n, \delta)$  分别为  $(0, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 2, 0)$ , ...,  $(0, 8, 8, 0)$ , 代入式(2)进行计算。实算结果为  $(n, \delta) = (0, 1, 1, 0)$  的参数椭球的重力扁率最大, 依次排列,  $(n, \delta) = (0, 8, 8, 0)$  的参数椭球的重力扁率最小。以上参数的参数椭球的表面重力与匀质椭球的表面重力  $g_0$  和水准椭球的表面重力  $\gamma_0$  的纬度分布由图 3 所示。

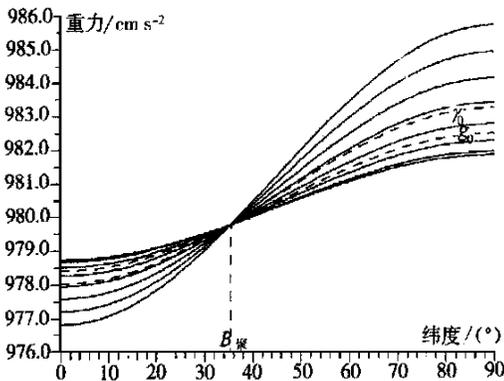


图 3  
Fig. 3

由图 3 可见, 不同参数的参数椭球表面重力的曲线, 匀质椭球表面重力  $g_0$  的曲线, 水准椭球表面重力  $\gamma_0$  的曲线, 在一个特殊的纬度值上“几乎相聚”(并非“完全相交”)于一点, 故我们将这一点称为参数椭球(因为匀质椭球与不同参数的参数椭球均满足 1980 大地参考系统的四个基本常数, 所以匀质椭球是参数椭球的一个特例)与水准椭球的“重力聚点”。

不同参数的参数椭球(含匀质椭球)的表面重力与水准椭球的表面重力在“重力聚点”处相聚在一起, 由此我们定义: 匀质椭球(参数椭球的特例)表面重力曲线和水准椭球表面重力曲线的“交点”, 就是参数椭球与水准椭球的“重力聚点”。

由式(5)和式(8)可算出重力聚点的纬度  $B_{聚}$ 。令:  $g_0 = \gamma_0$   
得

$$a^2 g_e \cos^2 B_{聚} + b^2 g_p^2 \sin^2 B_{聚} = a \gamma_0 \cos^2 B_{聚} + b \gamma_p \sin^2 B_{聚}$$

将式(11)代入上式可得

$$B_{聚} = \pm 35 \ 21 \ 32 \ 544 \quad (16)$$

将  $B_{聚}$  代入式(5)和式(8), 可算出重力聚点的理论重力值为

$$\gamma_{聚} = g_{聚} = 979.764331 \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

为作图之便, 我们在图 3 中选取的参数  $(n, \delta)$  是有限的, 但并不是特定的。实际上, 重力聚点的存在, 对于参数椭球不同参数的选取范围来说是相当“宽松”的。也就是说, 在较大范围内, 不同参数的参数椭球在重力聚点的重力值, 均与重力聚点的理论重力值相差不大(参见表 1)。

表 1 重力聚点理论重力差值表

Tab 1 The difference of gravity

		$10^{-3} \text{cm/s}^2$				
$\delta \setminus n$	$n$	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5
1.0		- 5.019	- 4.757	- 4.290	- 3.679	- 2.963
2.0		- 4.109	- 3.893	- 3.510	- 3.009	- 2.423
3.0		- 3.085	- 2.921	- 2.634	- 2.257	- 1.817
4.0		- 1.946	- 1.842	- 1.661	- 1.423	- 1.145
5.0		- 0.693	- 0.656	- 0.591	- 0.506	- 0.407
$\delta_0$		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.0		0.675	0.638	0.575	0.493	0.396
7.0		2.156	2.040	1.838	1.574	1.265
8.0		3.752	3.549	3.198	2.738	2.199
9.0		5.462	5.165	4.654	3.983	3.199
$\delta \setminus n$	$n$	0 6	0 7	0 8	0 9	1.0
1.0		- 2.168	- 1.402	- 0.705	- 0.228	0.000
2.0		- 1.772	- 1.145	- 0.576	- 0.185	0.000
3.0		- 1.329	- 0.858	- 0.431	- 0.138	0.000
4.0		- 0.837	- 0.540	- 0.271	- 0.086	0.000
5.0		- 0.298	- 0.192	- 0.096	- 0.030	0.000
$\delta_0$		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.0		0.290	0.187	0.094	0.029	0.000
7.0		0.925	0.596	0.299	0.094	0.000
8.0		1.607	1.035	0.519	0.162	0.000
9.0		2.338	1.504	0.755	0.234	0.000

由图 3 和表 1 可见, 密度参数  $\delta$  和深度参数  $n$  的变化所引起的重力变化, 在重力聚点两侧方向相反, 但在重力聚点处影响不大; 再参照本文第 3 节“物质流动定理”, 我们得到水准椭球的“重力聚点定理”。

重力聚点定理: 水准椭球表面重力和匀质椭球表面重力的曲线的交点, 称为重力聚点。当水准椭球的密度分布发生整体变化时, 其重力效应在

重力聚点处基本为零,但在重力聚点两侧方向相反,并在极点和赤道分别取得两相反方向的最大值。当物质由内向外流动时,极点的重力减小而赤道的重力增大;当物质由外向内流动时,极点的重力增大而赤道的重力减小。

由于水准椭球与地球具有特殊关系,故可认为水准椭球的“重力聚点”与“重力聚点定理”,对地球也是适用的。

## 5 讨论

由式(16)可知,重力聚点在地球上并不只是一个点,而是南、北半球相对称的两个纬度圈,在这两个纬度圈上的点都是重力聚点。由重力聚点定理可知,极点和赤道是重力测量监测全球密度整体变化的理想场所,而这种监测在地球的重力聚点附近是不起作用的,所以,应该采用高精度的重力仪在地球的极点和赤道进行同时监测。

就像极点和赤道一样,重力聚点是地球上的特征点,重力聚点定理给出了重力聚点的地球重力学含义,而重力聚点的地球物理学含义和地质学含义则有待深入研究。例如,大陆地震中的7级以上强震集中发生在北纬20至50之间的地带,横贯亚欧和北美大陆<sup>[5]</sup>,而重力聚点“恰好”处在

强地震带的正中间,这难道是巧合吗?

本研究得到张赤军研究员和吴蓉元教授的帮助与指导,在此表示衷心感谢!

## 参考文献:

- [1] HAO Xiao-guang The Gravity of Parameter Ellipsoid[J]. Earth Science—Journal of China University of Geosciences, 1997, 22(2): 223-226 (in Chinese)
- [2] HAO Xiao-guang Modification of Conception of Latitude Correction in Gravity Measurement[J]. Crustal Deformation and Earthquake, 1996, 16(3): 8-13 (in Chinese)
- [3] FANG Jun Gravimetry and Figure of the Earth[M]. Beijing: Science Press, 1975. 64-75 (in Chinese)
- [4] GUO Jun-yi The Fundamentals of Physical Geodesy[M]. Wuhan: The Publishing House of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1994, 135-143 (in Chinese)
- [5] LI Chun-yu, GUO Ling-zhi, ZHU Xia et al, Fundamental Problems of Plate Tectonic[M]. Beijing: Seismological Publishing House, 1986. 378-380 (in Chinese)