参数椭球表面的重力

郝晓光

(中国科学院测量与地球物理研究所,武汉 430077)

摘 要 推导了带密度参数和界面深度参数的旋转椭球表面重力的封闭公式,提出了“参数椭球”的概念.

关键词 密度参数,界面深度参数,参数椭球.

中图法分类号 P312

作者简介 郝晓光,男,高级工程师,1958年生,1982年毕业于同济大学测量系,现为中国科学院测量与地球物理研究所在职博士研究生,第十三次中国南极考察队队员,主要从事地球重力学的研究.

0 引言

地球形状和地球密度研究,是重力测量学的基本任务.利用重力资料研究地球形状的理论和方法已得到充分发展;相比之下,利用重力资料研究地球密度的理论和方法显得比较薄弱.研究地球形状的主题是求解大地水准面,常规重力异常是由水准椭球定义的,由此产生的理论与方法受司托克斯定理的支撑,避开了水准椭球的密度分布,解决了采用重力异常反演大地水准面的司托克斯问题.研究地球密度是要研究地球的“密度界面”而非大地水准面,不应该把研究地球形状的理论与方法照搬过来研究地球密度,科学研究的具体方法应跟随科研目的变更而发生相应的变化.研究地球的“密度界面”不应采用回避密度分布的水准椭球,而应采用带密度参数和密度界面深度参数的“参数椭球”.“参数椭球”的概念是相对“常数椭球”而言的,“常数椭球”(例如水准椭球或匀质椭球)的表面重力是“静止”的,“参数椭球”的表面重力是随密度参数和界面深度参数的变化而“运动”的;对照“参数椭球”的运动方式,可研究和探讨椭球内部的密度与界面的变化规律,以及这种规律与椭球表面重力的内在联系.也就是说,应该把“参数椭球”看成是研究地球密度的一种数学上的方法和工具,而不应把它当成一种对地球密度去进行近似模拟的地球模型.

1 “匀质椭球”外部引力公式的推导

为了推导“参数椭球”表面的重力公式,必须首先推导“匀质椭球”外部的引力公式.由物理大地测量学可知,匀质旋转椭球体的表面引力位 (V_0) 及表面重力 g_0 为

$$V_0 = -\frac{1}{2}P_0 x_0^2 - \frac{1}{2}P_0 y_0^2 - \frac{1}{2}Q_0 z_0^2 + K_0 \quad (1)$$

$$g_0 = (P_0 - \omega^2)x_0\,\mathrm{i} + (P_0 - \omega^2)y_0\,\mathrm{j} + Q_0 z_0\,\mathrm{k} \quad (2)$$

式中: $P_0 = 2\pi f\delta\frac{1+e'^2}{e'^3}\left(\arctan e' - \frac{e'}{1+e'^2}\right)$;

$$Q_0 = 4\pi f\delta\frac{1+e'^2}{e'^3}(e' - \arctan e');$$

$$K_0 = 2\pi f\delta\frac{a^2}{e'}\arctan e'.$$

引力椭球的表面方程为

$$\frac{x_0^2+y_0^2}{a^2}+\frac{z_0^2}{b^2}=1, \quad \frac{\rho_0^2\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\rho_0^2\cos^2\theta}{b^2}=1,$$

$$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$

若引力椭球的外部点 (x, y, z) 或 (ρ, θ, λ),过该点做与引力椭球同心、同轴、共焦、旋转、且质量为零的辅助椭球面,其方程为

1996年3月19日收稿.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+c}+\frac{z^2}{b^2+c}=1;\ \frac{\rho^2\sin^2\theta}{a^2+c}+\frac{\rho^2\cos^2\theta}{b^2+c}=1;$$

$$e_c'^2=\frac{(a^2+c)-(b^2+c)}{b^2+c}=\frac{a^2-b^2}{b^2+c}.$$

其中 $c>0$,$\rho>\rho_0$.

参照(1)式,由艾复来定理和麦克劳令定理,匀质椭球体的外部引力位为

$$V_e=-\frac{1}{2}P_ex^2-\frac{1}{2}P_ey^2-\frac{1}{2}Q_ez^2+K_e$$

式中:

$$P_e=2\pi f\delta\frac{1+e'^2}{e'^3}(\arctan e'_c-\frac{e'_c}{1+e'^2_c});$$

$$Q_e=4\pi f\delta\frac{1+e'^2}{e'^3}(e'_c-\arctan e'_c);$$

$$K_e=2\pi f\delta\frac{a^2}{e'}\arctan e'_c;$$

$$e'_c=\frac{be'}{\sqrt{b^2+c}};\quad \frac{e'_c}{1+e'^2_c}=\frac{be'\sqrt{b^2+c}}{b^2(e'^2+1)+c}.$$

由辅助椭球面方程可解得

$$c^2+[(a^2+b^2)-(x^2+y^2+z^2)]c+[a^2(b^2-z^2)-b^2(x^2+y^2)]=0;$$

$$2c=[(a^2+b^2-\rho^2)^2+4\rho^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)-4a^2b^2]^{1/2}-(a^2+b^2-\rho^2)$$

坐标换算公式为

$$x=\rho\sin\theta\cos\lambda,\ y=\rho\sin\theta\sin\lambda,\ z=\rho\cos\theta$$

其中:$\cos\theta=\dfrac{b^2\sin B}{\rho_0\sqrt{a^2\cos^2B+b^2\sin^2B}}$;

$$\sin\theta=\frac{a^2\cos B}{\rho_0\sqrt{a^2\cos^2B+b^2\sin^2B}}$$

式中:θ为极距,λ为经度,B 为纬度. 于是

$$2c=\sqrt{(a^2+b^2-\rho^2)^2+4a^2b^2(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}-1)}-(a^2+b^2-\rho^2)$$

于是,匀质旋转椭球体的外部引力分量为

$$F_x=\frac{\partial V_e}{\partial x}=P_ex+(\frac{x^2+y^2}{2})\frac{\partial P_e}{\partial x}+\frac{z^2}{2}\frac{\partial Q_e}{\partial x}-\frac{\partial K_e}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P_e}{\partial x}=2\pi f\delta\frac{1+e'^2}{e'^3}\frac{\partial}{\partial x}(\arctan e'_c-\frac{e'_c}{1+e'^2_c})=2\pi f\delta\frac{1+e'^2}{e'^3}\frac{2e'^2_c}{(1+e'^2_c)^2}\frac{\partial e'_c}{\partial x}=(\frac{2\pi f\delta}{1+e'^2_c}\frac{1+e'^2}{e'^3}\frac{\partial e'_c}{\partial x})(\frac{2e'^2_c}{1+e'^2_c});$$

$$\frac{\partial Q_e}{\partial x}=4\pi f\delta\frac{1+e'^2}{e'^3}\frac{\partial}{\partial x}(e'_c-\arctan e'_c)=4\pi f\delta\frac{1+e'^2}{e'^3}\frac{e'^2_c}{1+e'^2_c}\frac{\partial e'_c}{\partial x}=(\frac{2\pi f\delta}{1+e'^2_c}\frac{1+e'^2}{e'^3}\frac{\partial e'_c}{\partial x})(2e'^2_c);$$

$$\frac{\partial K_e}{\partial x}=2\pi f\delta\frac{a^2}{e'}\frac{\partial}{\partial x}(\arctan e'_c)=2\pi f\delta\frac{a^2}{e'}\frac{1}{1+e'^2_c}\frac{\partial e'_c}{\partial x}=(\frac{2\pi f\delta}{1+e'^2_c}\frac{1+e'^2}{e'^3}\frac{\partial e'_c}{\partial x})(\frac{a^2e'^2}{1+e'^2}).$$

所以

$$F_x=P_ex+(\frac{2\pi f\delta}{1+e'^2_c}\frac{1+e'^2}{e'^3}\frac{\partial e'_c}{\partial x})[(\frac{2e'^2_c}{1+e'^2_c})\cdot\frac{x^2+y^2}{2}+(2e'^2_c)\frac{z^2}{2}-(\frac{a^2e'^2}{1+e'^2})]=$$

$$P_ex+(\frac{2\pi f\delta}{1+e'^2_c}\frac{1+e'^2}{e'^3}\frac{\partial e'}{\partial x})[(a^2-b^2)\frac{x^2+y^2}{a^2+c}+(a^2-b^2)\frac{z^2}{b^2+c}-(a^2-b^2)]=$$

$$P_ex+(a^2-b^2)(\frac{2\pi f\delta}{1+e'^2_c}\frac{1+e'^2}{e'^3}\frac{\partial e'_c}{\partial x})\cdot(\frac{x^2+y^2}{a^2+c}+\frac{z^2}{b^2+c}-1)$$

因

$$[\frac{x^2+y^2}{a^2+c}+\frac{z^2}{b^2+c}-1]=0,\text{故 } F_x=P_ex$$

同理可得

$$F_y=\frac{\partial V_e}{\partial y}=P_ey+(a^2-b^2)(\frac{2\pi f\delta}{1+e'^2_c}\frac{1+e'^2}{e'^3}\cdot\frac{\partial e'_c}{\partial y})(\frac{x^2+y^2}{a^2+c}+\frac{z^2}{b^2+c}-1)=P_ey;$$

$$F_z=\frac{\partial V_e}{\partial z}=Q_ez+(a^2-b^2)(\frac{2\pi f\delta}{1+e'^2_c}\frac{1+e'^2}{e'^3}\cdot\frac{\partial e'_c}{\partial z})(\frac{x^2+y^2}{a^2+c}+\frac{z^2}{b^2+c}-1)=Q_ez.$$

于是,匀质旋转椭球体的外部引力为

$$\mathrm{F}_e=P_ex\mathrm{i}+P_ey\mathrm{j}+Q_ez\mathrm{k} \qquad (3)$$

2 "双层参数椭球"表面重力公式的推导

设大、小两相似旋转椭球同心、同轴,其表面方程分别为

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta};\rho_1^2=\frac{a_1^2b_1^2}{a_1^2\cos^2\theta+b_1^2\sin^2\theta};$$

$$e_1'^2=\frac{a_1^2-b_1^2}{b_1^2}=\frac{a^2-b^2}{b^2}=e'^2$$

其中:$a_1=na$,$b_1=nb$,$(0<n<1)$.

再设 δ_i 为小椭球的匀质密度(内密度),δ_e 为大椭球面与小椭球面之间的匀质密度(外密度). 因为

重力以及引力可进行分量叠加,故双层椭球的表面重力可由三部分叠加而成;其值应该等于“大椭球(密度为 δ_e 的重力)”先减去“小椭球(密度为 δ_e 的引力)”,再加上“小椭球(密度为 δ_i 的引力)”;其中,大椭球的重力为“匀质椭球的表面重力问题”(可由(b)式给出),小椭球的引力为“匀质椭球的外部引力问题”(可由(c)式给出).若设 (x, y, z) 为大椭球表面点的坐标,由(b)式和(c)式可得双层椭球的表面重力为

$$\mathrm{g} = (P_1 - \omega^2 - P_2 + P_3)x\mathrm{i} + (P_1 - \omega^2 - P_2 + P_3)\cdot y\mathrm{j} + (Q_1 - Q_2 + Q_3)z\mathrm{k}$$

$$P_1 = 2\pi f\delta_e\frac{1+e'^2}{e'^3}\left(\arctan e' - \frac{e'}{1+e'^2}\right);$$

$$Q_1 = 4\pi f\delta_e\frac{1+e'^2}{e'^3}(e' - \arctan e');$$

$$P_2 = 2\pi f\delta_e\frac{1+e_1'^2}{e_1'^3}\left(\arctan\frac{b_1e_1'}{\sqrt{b_1^2+c}} - \frac{b_1e_1'\sqrt{b_1^2+c}}{b_1^2(e_1'^2+1)+c}\right);\ Q_2 = 4\pi f\delta_e\frac{1+e_1'^2}{e_1'^3}\left(\frac{b_1e_1'}{\sqrt{b_1^2+c}} - \arctan\frac{b_1e_1'}{\sqrt{b_1^2+c}}\right);$$

$$P_3 = 2\pi f\delta_i\frac{1+e_1'^2}{e_1'^3}\left(\arctan\frac{b_1e_1'}{\sqrt{b_1^2+c}} - \frac{b_1e_1'\sqrt{b_1^2+c}}{b_1^2(e_1'^2+1)+c}\right);$$

$$Q_3 = 4\pi f\delta_i\frac{1+e_1'^2}{e_1'^3}\left(\frac{b_1e_1'}{\sqrt{b_1^2+c}} - \arctan\frac{b_1e_1'}{\sqrt{b_1^2+c}}\right);$$

$$2c = \sqrt{(a_1^2+b_1^2-\rho^2)^2 + 4a_1^2b_1^2\left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2}-1\right)} - (a_1^2+b_1^2-\rho^2)$$

令

$$P = P_1 - P_2 + P_3;\ Q = Q_1 - Q_2 + Q_3$$

则

$$\mathrm{g} = (P - \omega^2)x\mathrm{i} + (P - \omega^2)y\mathrm{j} + Qz\mathrm{k}$$

若 T_1 为小椭球体积, T 为大椭球体积, M 为双层椭球的总质量,则

$$T_1 = n^3T,\ \delta_in^3T + \delta_eT(1-n^3) = M;$$

$$\delta_in^3 + \delta_e(1-n^3) = \frac{M}{T},\ \delta_i - \delta_e = \frac{3M - 4\delta_e\pi a^2b}{4\pi a^2bn^3}$$

于是,以双层椭球的外密度 δ_e 和界面深度比例系数 n 为参数的参数椭球表面重力的封闭公式为

$$g = |\mathrm{g}| = \sqrt{\frac{(P-\omega^2)^2a^4\cos^2B + Q^2b^4\sin^2B}{a^2\cos^2B + b^2\sin^2B}} \tag{4}$$

式中

$$P = 2\pi f\frac{1+e'^2}{e'^3}\left[\frac{3M - 4\delta_e\pi a^2b}{4\pi a^2bn^3}\cdot\left(\arctan\frac{nbe'}{\sqrt{n^2b^2+c}} - \frac{nbe'\sqrt{n^2b^2+c}}{n^2b^2(e'^2+1)+c}\right) + \delta_e\left(\arctan e' - \frac{e'}{1+e'^2}\right)\right];$$

$$Q = 4\pi f\frac{1+e'^2}{e'^3}\left[\frac{3M - 4\delta_e\pi a^2b}{4\pi a^2bn^3}\left(\frac{nbe'}{\sqrt{n^2b^2+c}} - \arctan\frac{nbe'}{\sqrt{n^2b^2+c}}\right) + \delta_e(e' - \arctan e')\right]$$

而 P, Q 中

$$c = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(n^2a^2+n^2b^2-\rho^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1-n^2)} - (n^2a^2+n^2b^2-\rho^2)\right];$$

$$\rho = \sqrt{\frac{a^4\cos^2B + b^4\sin^2B}{a^2\cos^2B + b^2\sin^2B}}$$

3　讨论

如前所述,“参数椭球”是研究地球密度的方法和工具.但是,如果当“参数椭球”的参数发生变化时,“参数椭球”表面的重力不发生变化,或仅发生微小变化;那么这种方法或工具就只有理论意义而没有实际意义.

采用 1980 大地参考系统 (a, b, fM, ω),由(4)式计算,结果列于表 1,并由此绘出关系图(图 1,2).

表 1　参数椭球重力扁率变化

Table 1　Relation between the gravity oblateness of parameter ellipsoid and two parameters

δ_e	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1.0	9.08	8.93	8.68	8.33	7.88	7.33	6.68	5.93	5.08	4.14
2.0	7.98	7.87	7.67	7.40	7.05	6.62	6.12	5.54	4.88	4.14
3.0	6.89	6.81	6.67	6.47	6.22	5.92	5.56	5.14	4.67	4.14
4.0	5.80	5.75	5.66	5.54	5.40	5.21	4.99	4.74	4.46	4.14
5.0	4.70	4.69	4.66	4.62	4.57	4.50	4.43	4.34	4.25	4.14
5.517	4.14	4.14	4.14	4.14	4.14	4.14	4.14	4.14	4.14	4.14
6.0	3.61	3.63	3.66	3.69	3.74	3.80	3.87	3.95	4.04	4.14
7.0	2.52	2.57	2.65	2.77	2.91	3.09	3.31	3.55	3.83	4.14
8.0	1.43	1.51	1.65	1.84	2.09	2.39	2.74	3.16	3.62	4.14
9.0	0.34	0.46	0.65	0.92	1.26	1.68	2.18	2.76	3.41	4.14
10.0	-0.75	-0.60	-0.35	-0.01	0.44	0.98	1.62	2.36	3.20	4.14

重力扁率 $\beta = (g_p - g_e)/g_e$ 是衡量全球重力变化的指标.由表 1 可见,当 $n = 1$ 或者当 $\delta_e =$

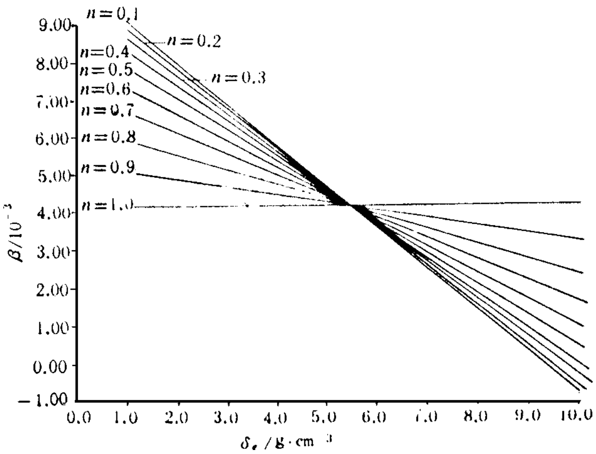

图 1 参数椭球重力扁率与密度参数关系

Fig.1 Relation between the gravity oblateness of parameter ellipsoid and density

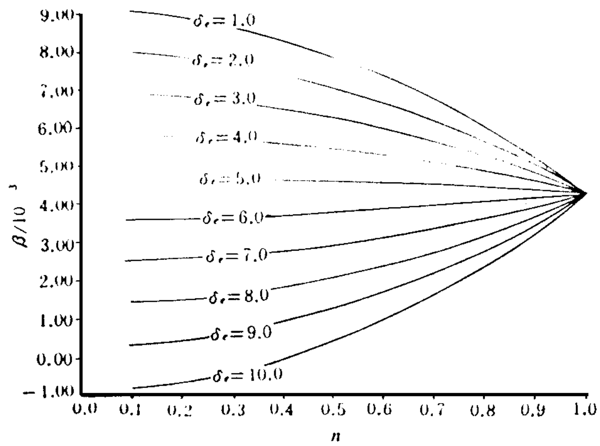

图 2 参数椭球重力扁率 n 与界面深度参数关系

Fig.2 Relation between the gravity oblateness of parameter ellipsoid and depth

$3M/4\pi a^2 b = 5.517(\mathrm{g/cm^3})$ 时,“双层参数椭球”退化成“匀质椭球”,“匀质椭球”的重力扁率等于 4.14×10^{-3};当 $\delta_e < 5.517$ 时,“参数椭球”为“内密外疏椭球”,其重力扁率大于“匀质椭球”的重力扁率;当 $\delta_e > 5.517$ 时,“参数椭球”为“内疏外密椭球”,其重力扁率小于“匀质椭球”的重力扁率.

由图 1 可见,当界面深度参数固定时,重力扁率与密度参数成线性的反比关系.由图 2 可见,当密度参数固定时,就“内密外疏椭球”而言,重力扁率与界面深度参数成非线性的反比关系;就“内疏外密椭球”而言,重力扁率与界面深度参数成非线性的正比关系.

因“水准椭球”的重力扁率等于 5.30×10^{-3},大于“匀质椭球”的重力扁率.故由以上讨论可知,“水准椭球”必为“内密外疏椭球”.

实算表明,当密度参数和界面深度参数发生变化时,“参数椭球”的重力扁率将发生最大约 10 倍的变化,这表明地球密度的重力反映量是相当充分的.据此可认为,“参数椭球”作为应用重力测量学研究地球密度的方法和工具是比较理想的,它必将在地球密度的研究工作中发挥理论和实际的积极作用.

作者在本文的写作过程中得到许厚泽院士、张赤军研究员和吴蓉元教授的帮助与指导,在此表示衷心感谢!

参 考 文 献

1 郝晓光.对重力测量纬度改正概念的修正.地壳形变与地震,1996,16(3):8～13
2 方俊.重力测量与地球形状学.下册.北京:科学出版社,1975. 64～75
3 郭俊义.物理大地测量学基础.武汉:武汉测绘科技大学出版社,1994. 118～130

THE GRAVITY OF PARAMETER ELLIPSOID

Hao Xiaoguang
(*Institute of Geodetics and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan* 430077)

Abstract A new conception for parameter ellipsoid is presented in this paper. The formula of parameter ellipsoid's gravity that contains interface depth parameters and density parameters are derived.

Key words density parameter, interface depth parameter, parameter ellipsoid.